Unitaires multiplicatifs en dimension finie et leurs sous-objets

Saad Baaj, Etienne Blanchard, Georges Skandalis

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

SAAD BAAJ
ÉTIENNE BLANCHARD
GEORGES SKANDALIS

Unitaires multiplicatifs en dimension finie et leurs sous-objets

Annales de l'institut Fourier, tome 49, nº 4 (1999), p. 1305-1344.
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1999__49_4_1305_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
49, 4 (1999), 1305–1344

UNITAIRES MULTIPLICATIFS EN DIMENSION FINIE ET LEURS SOUS-OBJETS

par S. BAAJ, E. BLANCHARD et G. SKANDALIS

Dans cet article, nous étudions l'équivalent des sous-groupes pour les unitaires multiplicatifs en dimension finie. Nous montrons que les «sous-groupes» en notre sens correspondent aux sous-algèbres coïdéales des algèbres de Hopf (*cf. e.g.* [17]) et donc aux facteurs intermédiaires des inclusions de profondeur 2 (*cf.* [11]).

Notre approche donne donc un nouveau point de vue sur les sous-objets des algèbres de Hopf et sur les facteurs intermédiaires. Il permet de retrouver de façon souvent élémentaire un certain nombre de résultats de ces deux cadres (*e.g.* des résultats de liberté de Masuoka - [16], un résultat de finitude de [22]). Il nous permet aussi d'énoncer et démontrer quelques résultats nouveaux (*e.g.* intégralité de certains inverses de produits scalaires, généralisation d'une construction de biproduits croisés - *cf.* [12], [21], [15]).

Le point de vue pris ici est celui de [1] : nous partons d'un unitaire multiplicatif $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$ où $\mathcal{H}$ est un espace hilbertien de dimension finie. Une question très naturelle est alors : *Quels sont les sous-objets de* $(\mathcal{H}, V)$? Autrement dit, quels sont les sous-espaces H de $\mathcal{H}$ tels que $V(H \otimes H) = H \otimes H$?

Cette question nous amène à étudier d'abord le cas des sous-espaces comme ci-dessus de dimension 1, c'est à dire les vecteurs unitaires $f \in \mathcal{H}$ tels que $V(f \otimes f) = f \otimes f$. Dans le cas de l'unitaire multiplicatif d'un groupe fini G, ($\mathcal{H} = \ell^2(G)$, $V(\xi)(s,t) = \xi(st,t)$, pour $\xi \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} = \ell^2(G \times$

Mots-clés : Unitaires multiplicatifs – Algèbres de Kac de dimension finie – Sous-facteurs.
Classification math : 46L05 – 47D35 – 16W30.

$G)$, $s, t \in G)$ un tel f est (proportionnel à) la fonction caractéristique d'un sous-groupe de G.

Dans le cas général, nous appelons un tel f un *pré-sous-groupe* de V. À un tel pré-sous-groupe, correspondent deux sous-espaces de $\mathcal{H}$, notés H^f et H_f, qui dans le cas d'un sous-groupe Γ d'un groupe G consistent respectivement en le sous-espace des fonctions nulles hors de Γ (l'espace H^f) et invariantes par translation à droite par Γ (l'espace H_f).

Nous obtenons aisément un équivalent dans notre cadre du théorème de Lagrange : pour tout pré-sous-groupe f, on a $\dim H^f \dim H_f = \dim \mathcal{H}$.

Il y a naturellement une relation d'ordre $\prec$ pour les pré-sous-groupes : l'inclusion pour les H^f correspondants. Cette relation a un plus grand élément, «le» vecteur fixe e et un plus-petit élément, «le» vecteur co-fixe $\hat{e}$. De plus, l'espace des pré-sous-groupes est un treillis. Cela nous permet de définir l'analogue dans notre cadre du sous-groupe engendré par une partie.

Si f et g sont deux pré-sous-groupes, $|\langle f, g\rangle|^{-2}$ est un entier. Il en résulte qu'il y a un nombre fini de pré-sous-groupes et on peut même donner une estimation (assez grossière) de leur nombre.

Nous disons qu'un pré-sous-groupe f est un *sous-groupe* (resp. un *co-sous-groupe*) si $V(H^f \otimes H^f) = H^f \otimes H^f$ (resp. $V(H_f \otimes H_f) = H_f \otimes H_f$) ; nous montrons que cela a lieu si et seulement si le projecteur sur H^f (resp. H_f) est dans le centre de l'algèbre S (resp. $\widehat{S}$) associée à V [(1)]. Si f est à la fois un sous-groupe et un co-sous-groupe, on dit que c'est un *sous-groupe normal*. Les notions de sous-groupe, co-sous-groupe et sous-groupe normal coïncident clairement avec celles introduites par Kac dans [12]. Les sous-groupes et les co-sous-groupes forment un sous-treillis de l'ensemble des pré-sous-groupes.

Enfin, les pré-sous-groupes permettent de classifier les *sous-quotients* de V *i.e.* les sous-espaces H de $\mathcal{H}$ tels que $V(H \otimes H) = H \otimes H$: pour un tel H, il existe un unique couple $(f, \hat{f})$ de pré-sous-groupes tels que $\hat{f} \prec f$ et $H = H^f \cap H_{\hat{f}}$. Inversement, nous donnons plusieurs conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une telle intersection soit un sous-quotient. En particulier, nous montrons que pour tout pré-sous-groupe $\hat{f}$ il existe un plus grand pré-sous-groupe f (le *normalisateur* de $\hat{f}$) tel que $\hat{f} \prec f$ et $H^f \cap H_{\hat{f}}$ soit un sous-quotient.

---

(1) Pour l'unitaire multiplicatif associé à un groupe fini G, l'algèbre $S = C(G)$ associée est commutative, donc tout pré-sous-groupe est un sous-groupe.

Si f est un pré-sous-groupe, l'ensemble $D_f = \{ x \in S\,,\ \kappa(x)e \in H_f \}$ (où κ désigne l'antipode de S) est une sous-algèbre coïdéale (à droite) *i.e.* une sous-algèbre involutive de S telle que $\delta(D_f) \subset D_f \otimes S$ (où δ désigne le coproduit de S). Réciproquement, toute sous-algèbre coïdéale (à droite) D de S est de la forme D_f. En ce sens, notre analogue du théorème de Lagrange est une réécriture d'un résultat plus général de [16]. Notons que dans [16], ce théorème de Lagrange résulte d'un résultat plus précis : S est un D-module libre, dont nous donnons, dans notre cadre, une démonstration nouvelle. Nous discutons aussi de nouveaux résultats de liberté analogues à ceux de [16] : plus précisément, nous définissons aussi une sous-algèbre coïdéale (à gauche) $\widehat{G}_f = \{ y \in \widehat{S}\,,\ \widehat{\kappa}(y)\hat{e} \in H^f \}$ de $\widehat{S}$. Nous montrons que l'espace vectoriel $B_{f,f}$ engendré par $\{ xy\,,\ x \in D_f\,,\ y \in \widehat{G}_f \}$ est une sous-algèbre involutive de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ et que $\mathcal{H}$ est un module libre (de rang 1) sur $B_{f,f}$. Nous généralisons cela à une algèbre $B_{f,g}$ associée de façon analogue à deux pré-sous-groupes f et g.

Le coproduit de l'algèbre de Kac S (et donc l'unitaire multiplicatif V) dépend uniquement des algèbres S et $\widehat{S}$ et des vecteurs e et $\hat{e}$. On peut en fait caractériser les quadruplets $(S, \widehat{S}, e, \hat{e})$ parmi les quadruplets $(A, B, f, \hat{f})$ où A et B sont des sous-C^*-algèbres de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ et $f, \hat{f}$ sont des vecteurs (de norme 1) de $\mathcal{H}$.

À l'aide de cette caractérisation nous donnons une généralisation à notre cadre du biproduit croisé (*cf.* [12], [21], [15]) : à deux pré-sous-groupes f et g les plus éloignés possible *i.e.* tels que $|\langle f, g\rangle|^{-2} = \dim\mathcal{H}$, nous associons un nouvel unitaire multiplicatif W ; l'algèbre $\widehat{S}$ associée à W est l'algèbre $B_{g,g}$ associée à g ; l'algèbre S est une algèbre $A_{f,f}$ construite de façon analogue. Cette construction s'interprète simplement en termes d'inclusions de facteurs.

Dans le cas de deux sous-groupes G_1, G_2 d'un groupe fini G tels que $G_1G_2 = G$, $G_1 \cap G_2 = \{e\}$, l'unitaire multiplicatif W est associé au «biproduit croisé» de [21], [15] (*cf.* aussi [12] et [1] §8).

De plus, par [11], les sous-algèbres coïdéales correspondent aux facteurs intermédiaires d'une inclusion irréductible associée à S. Plusieurs de nos résultats s'interprètent en termes de facteurs intermédiaires. En particulier, notre résultat de finitude est une réécriture (plus précise) d'un résultat plus général de [22].

L'organisation de ce travail est la suivante :

Dans le premier paragraphe, nous faisons quelques rappels et compléments pour les unitaires multiplicatifs sur un espace hilbertien de dimension finie.

Dans le deuxième paragraphe, nous donnons une caractérisation des algèbres de Kac (et leur algèbre duale) parmi les couples de sous-algèbres de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Nous introduisons ensuite les pré-sous-groupes, pour lesquels nous donnons plusieurs résultats d'intégralité, ainsi que la relation d'ordre et ses propriétés (paragraphe 3). Nous faisons le lien avec les sous-algèbres coïdéales au quatrième paragraphe, ainsi que la construction de plusieurs autres sous-algèbres associées à des pré-sous-groupes.

Au cinquième paragraphe, nous discutons les sous-groupes, co-sous-groupes et sous-quotients.

Au sixième paragraphe, en nous aidant du paragraphe 2, nous donnons la généralisation du biproduit croisé mentionnée ci-dessus.

Nous interprétons enfin (paragraphe 7) nos résultats en termes d'inclusions de facteurs d'indice fini et de profondeur 2.

Nous remercions M. Izumi qui a attiré notre attention sur le lien entre sous-algèbres coïdéales et sous-facteurs de [11] et D. Bisch pour plusieurs conseils bibliographiques.

1. Préliminaires.

Dans ce paragraphe, nous fixons quelques notations et particularisons à la dimension finie certaines constructions de [7] et [1]. Nous donnons en outre quelques autres résultats plus spécifiques à la dimension finie (*cf.* aussi [13]).

Notations. — Dans cet article, $\mathcal{H}$ désigne un espace hilbertien de dimension finie $n \neq 0$ et $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H})$ un unitaire multiplicatif sur $\mathcal{H}$, *i.e.* tel que $V_{12}V_{13}V_{23} = V_{23}V_{12}$ $(\in \mathcal{L}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}))$.

Rappelons (*cf.* [1]) que pour $\omega \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^*$ on note $L(\omega) = (\omega\otimes\mathrm{id})(V) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et $\rho(\omega) = (\mathrm{id}\otimes\omega)(V)$; les ensembles $S = \{\, L(\omega)\,,\ \omega \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^*\,\}$ et $\widehat{S} = \{\,\rho(\omega)\,,\ \omega \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^*\,\}$ sont des sous-algèbres involutives de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Les applications $\delta : x \mapsto V(x\otimes 1)V^*$ de S dans $S\otimes S$ et $\widehat{\delta} : x \mapsto V^*(1\otimes x)V$ de $\widehat{S}$ dans $\widehat{S}\otimes\widehat{S}$ munissent S et $\widehat{S}$ de structures de C^*-algèbres de Hopf.

1.1. Remarquons que $L(\omega)$ (resp. $\rho(\omega)$) ne dépend que de la restriction de ω à $\widehat{S}$ (resp. S). Les algèbres S et $\widehat{S}$ sont en dualité *via* la forme bilinéaire $\beta : (L(\omega), \rho(\omega')) \mapsto (\omega \otimes \omega')(V) = \omega(\rho(\omega')) = \omega'(L(\omega))$. Le produit (resp. coproduit) de S est dual pour β du coproduit (resp. produit) de $\widehat{S}$: pour $x, x' \in S$, $y, y' \in \widehat{S}$, on a

$$\beta(xx', y) = (\beta \otimes \beta)(x \otimes x', \widehat{\delta}(y)), \qquad \beta(x, yy') = (\beta \otimes \beta)(\delta(x), y \otimes y').$$

Notons τ la trace normalisée de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Rappelons (*cf. e.g.* [1], §4) que les restrictions de τ à S et $\widehat{S}$ sont des mesures de Haar : pour tout $x \in S$ (resp $y \in \widehat{S}$) on a $(\mathrm{id} \otimes \tau)\delta(x) = (\tau \otimes \mathrm{id})\delta(x) = \tau(x)1$ (resp. $(\mathrm{id} \otimes \tau)\widehat{\delta}(y) = (\tau \otimes \mathrm{id})\widehat{\delta}(y) = \tau(y)1$).

Rappelons que $\xi \in \mathcal{H}$ est appelé *fixe* (resp *cofixe*) si, pour tout $\eta \in \mathcal{H}$ on a $V(\xi \otimes \eta) = \xi \otimes \eta$ (resp. $V(\eta \otimes \xi) = \eta \otimes \xi$)). Par [1] §4, $L(\tau)$ (resp $\rho(\tau)$) est le projecteur orthogonal sur l'espace des vecteurs cofixes (resp. fixes) de V. Comme $(\tau \otimes \tau)(V) = \tau(L(\tau)) = \tau(\rho(\tau))$, les projecteurs $L(\tau)$ et $\rho(\tau)$ ont donc même dimension. Autrement dit, les dimensions de l'espace des vecteurs fixes et des vecteurs cofixes coïncident.

On appelle *multiplicité* de V la dimension de l'espace des vecteurs fixes. Rappelons (*cf.* [1]) qu'un unitaire multiplicatif de multiplicité m est équivalent au produit tensoriel d'un unitaire multiplicatif de multiplicité 1 par $1 \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^m)$.

1.2. On suppose désormais que la multiplicité de V est 1. Soient e un vecteur fixe et $\hat{e} \in \mathcal{H}$ un vecteur cofixe de norme 1. Soient φ l'état vectoriel $\omega_{e,e}$ et $\widehat{\varphi}$ l'état vectoriel $\omega_{\hat{e},\hat{e}}$. Rappelons que φ et τ coïncident sur S et que $\widehat{\varphi}$ et τ coïncident sur $\widehat{S}$. Comme $L(\tau) = \theta_{\hat{e},\hat{e}}$, on a $1/n = \tau(\theta_{\hat{e},\hat{e}}) = \varphi(\theta_{\hat{e},\hat{e}}) = |\langle e, \hat{e}\rangle|^2$. Quitte à multiplier $\hat{e}$ par un scalaire de module 1 convenable, on supposera désormais que $\langle e, \hat{e}\rangle = n^{-1/2}$.

Les applications $\kappa : L(\omega) \mapsto L(\omega^*)^* = (\omega \otimes \mathrm{id})(V^*)$ et $\widehat{\kappa} : \rho(\omega) \mapsto \rho(\omega^*)^* = (\mathrm{id} \otimes \omega)(V^*)$ sont des antiautomorphismes involutifs de S et $\widehat{S}$ respectivement.

Comme κ préserve l'involution de S, l'application $xe \mapsto \kappa(x)e$ est un unitaire $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. On a $U^2 = 1$. De plus, $(\mathcal{H}, V, U)$ est un système de Kac, au sens de [1], §6. En particulier, en désignant par $\Sigma \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$ la volte (*i.e.* l'opérateur tel que $\Sigma(\xi \otimes \eta) = \eta \otimes \xi$), les unitaires $\widetilde{V} = (U \otimes 1)\Sigma V \Sigma (U \otimes 1)$ et $\widehat{V} = \Sigma(U \otimes 1)V(U \otimes 1)\Sigma$ sont multiplicatifs. De plus, $\Sigma \widehat{V} V \widetilde{V}(1 \otimes U) = 1$ et, pour $x \in S$, on a $\delta(x) = \widehat{V}^*(1 \otimes x)\widehat{V}$ et pour $x \in \widehat{S}$, on a $\widehat{\delta}(x) = \widetilde{V}(x \otimes 1)\widetilde{V}^*$.

Remarquons que $Ue = e$; de plus, si $\omega \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^*$ satisfait $\omega = \omega^*$ et $L(\omega) = L(\omega)^*$, alors $UL(\omega)e = L(\omega)e$. Appliquant ceci à $n^{1/2}\widehat{\varphi}$, on trouve $U\hat{e} = \hat{e}$.

Il s'ensuit que $\hat{e}$ est un vecteur fixe et e un vecteur cofixe pour $\widetilde{V}$ et $\widehat{V}$.

1.3. On a $(\mathrm{id} \otimes \omega_{\hat{e},e})(\Sigma V) = (\mathrm{id} \otimes \omega_{\hat{e},e})(\Sigma \widehat{V} V \widetilde{V}(1 \otimes U)) = n^{-1/2}$; de même, $(\omega_{e,\hat{e}} \otimes \mathrm{id})(\Sigma V) = (\omega_{e,\hat{e}} \otimes \mathrm{id})(\Sigma \widehat{V} V \widetilde{V}) = n^{-1/2} U$. Pour $\xi \in H$, on a donc $L(\omega_{\hat{e},\xi})e = (\mathrm{id} \otimes \omega_{\hat{e},e})(\Sigma V)\xi = n^{-1/2}\xi$ et $\rho(\omega_{\xi,e})^*\hat{e} = (\mathrm{id} \otimes \omega_{\hat{e},e})(\Sigma V)^*\xi = n^{-1/2}\xi$. Comme e et $\hat{e}$ sont séparateurs pour S et $\widehat{S}$ respectivement, on en déduit que, pour $x \in S$, $y \in \widehat{S}$ on a $x = n^{1/2} L(\omega_{\hat{e},xe})$ et $y = n^{1/2}\rho(\omega_{y\hat{e},e})^* = n^{1/2}\widehat{\kappa}(\rho(\omega_{e,y\hat{e}}))$.

En particulier, $\beta(x,y) = \beta(n^{1/2}L(\omega_{\hat{e},xe}),y) = n^{1/2}\omega_{\hat{e},xe}(y) = n^{1/2}\langle \hat{e}, yxe\rangle$.

Remarquons de plus que, pour $y \in \widehat{S}$, on a $\widehat{\kappa}(y) = n^{1/2}\rho(\omega_{e,y\hat{e}})$, donc $\widehat{\kappa}(y)\hat{e} = n^{1/2}\rho(\omega_{e,y\hat{e}})\hat{e} = n^{1/2}(\omega_{e,\hat{e}} \otimes \mathrm{id})(\Sigma V)y\hat{e} = Uy\hat{e}$.

La transformation de Fourier. Pour $x \in S$, on pose $\mathcal{F}(x) = n^{1/2}\rho(\omega_{e,xe})$; pour $y \in \widehat{S}$, on pose $\widehat{\mathcal{F}}(y) = n^{1/2}L(\omega_{\hat{e},y\hat{e}})$. Par ce qui précède, pour $x \in S$ et $y \in \widehat{S}$ on a $\mathcal{F}(x)\hat{e} = Uxe$ et $\widehat{\mathcal{F}}(y)e = y\hat{e}$. En particulier, $\widehat{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = \kappa$ et $\mathcal{F} \circ \widehat{\mathcal{F}} = \widehat{\kappa}$. On en déduit aussi que $\mathcal{F} \circ \kappa = \mathcal{F} \circ \widehat{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = \widehat{\kappa} \circ \mathcal{F}$.

Nous caractérisons ci-dessous les éléments dont la transformée de Fourier est positive, puis ceux dont la transformée de Fourier est centrale.

1.4. PROPOSITION.— a) *Pour $x \in S$, les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) $\rho(\omega_{e,xe}) \geqslant 0$. (ii) *La forme $\omega_{\hat{e},xe}$ est positive sur $\widehat{S}$.* (iii) *Il existe une forme positive $\psi \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^*$ telle que $x = L(\psi)$.*

L'ensemble des $x \in S$ tels que $\rho(\omega_{e,xe}) \geqslant 0$ est un cône convexe fermé stable par le produit de S et invariant par κ.
b) *Pour $y \in \widehat{S}$, les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) $L(\omega_{\hat{e},y\hat{e}}) \geqslant 0$. (ii) *La forme $\omega_{e,y\hat{e}}$ est positive sur S.* (iii) *Il existe une forme positive $\psi \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^*$ telle que $y = \rho(\psi)$.*

L'ensemble des $y \in \widehat{S}$ tels que $L(\omega_{\hat{e},y\hat{e}}) \geqslant 0$ est un cône convexe fermé stable par le produit de $\widehat{S}$ et invariant par $\widehat{\kappa}$.

Démonstration.— a) Posons $y = \widehat{\kappa}(\rho(\omega_{e,xe}))$. On a $\rho(\omega_{e,xe}) \geqslant 0 \iff y \geqslant 0 \iff$ la forme $y\widehat{\varphi}$ est positive sur $\widehat{S}$. Or, $xe = n^{1/2}y\hat{e}$, d'où l'équivalence (i) $\iff$ (ii).

On a $x = nL(\omega_{\hat{e},y\hat{e}})$ donc, pour une forme ψ, on a $L(\psi) = x$ si et seulement si ψ coïncide avec $n^{1/2}\omega_{\hat{e},xe}$ sur $\widehat{S}$, d'où (iii)$\Rightarrow$(ii). La réciproque résulte de ce que toute forme positive sur $\widehat{S}$ peut se prolonger en une forme positive sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Si ω et ω' sont des formes positives, $\psi : x \mapsto (\omega \otimes \omega')(V^*(1 \otimes x)V)$ est positive et $L(\omega)L(\omega') = L(\psi)$. En outre, pour $x \in S$, si $\mathcal{F}(x) \geqslant 0$ alors $\mathcal{F}(\kappa(x)) = \widehat{\kappa}(\mathcal{F}(x)) \geqslant 0$. L'ensemble des $x \in S$ tels que $\rho(\omega_{e,xe}) \geqslant 0$ est donc stable par le produit de S et invariant par κ. Les autres assertions de a) sont claires.

b) Se démontre de manière analogue (ou en remplaçant V par $\widetilde{V}$).

□

Notons par la même lettre σ la volte de $S \otimes S$ et celle de $\widehat{S} \otimes \widehat{S}$ (*i.e.* l'automorphisme donné par $\sigma(x \otimes y) = y \otimes x$).

1.5. PROPOSITION.— Soit $x \in S$ (resp. $\widehat{S}$). Alors $\rho(\omega_{e,xe})$ (resp. $L(\omega_{\hat{e},x\hat{e}})$) est dans le centre de $\widehat{S}$ (resp S) si et seulement si $\delta(x) = \sigma(\delta(x))$ (resp. $\widehat{\delta}(x) = \sigma(\widehat{\delta}(x))$. L'ensemble des $x \in S$ (resp. $\widehat{S}$) tels que $\rho(\omega_{e,xe})$ (resp. $L(\omega_{\hat{e},x\hat{e}})$) est dans le centre de $\widehat{S}$ (resp S) est une sous-algèbre involutive de S (resp. $\widehat{S}$).

Démonstration.— $\rho(\omega_{e,xe})$ (resp. $L(\omega_{\hat{e},x\hat{e}})$) est dans le centre de $\widehat{S}$ (resp S) si et seulement si la forme $y \mapsto \widehat{\varphi}(y\rho(\omega_{e,xe}))$ (resp. $y \mapsto \varphi(yL(\omega_{\hat{e},x\hat{e}}))$) est traciale sur $\widehat{S}$ (resp. S). Or, $\widehat{\varphi}(y\rho(\omega_{e,xe})) = \langle \hat{e}, y\rho(\omega_{e,xe})\hat{e}\rangle = n^{-1/2}\langle \hat{e}, y\kappa(x)e\rangle = n^{-1}\beta(\kappa(x), y)$ (resp. $\varphi(yL(\omega_{\hat{e},x\hat{e}})) = \langle e, yL(\omega_{\hat{e},x\hat{e}})e\rangle = n^{-1/2}\langle e, yx\hat{e}\rangle = n^{-1}\overline{\beta(y^*, x^*)}$). Cela signifie donc que pour $y, z \in \widehat{S}$ (resp S), on a $\beta(\kappa(x), yz) = \beta(\kappa(x), zy)$ (resp. $\beta(yz, x^*) = \beta(zy, x^*)$). Or $\delta(\kappa(x)) = (\kappa \otimes \kappa)\sigma\delta(x)$. La proposition résulte alors des formules de 1.1.

□

1.6. On note $J : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ l'isométrie antilinéaire $xe \mapsto x^*e$ et $\widehat{J} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ l'isométrie antilinéaire $L(\omega)e \mapsto L(\omega^*)e$. Remarquons que $U = J\widehat{J}$. Les applications J, $\widehat{J}$ et U étant involutives, on a aussi $U = \widehat{J}J$. Pour $y \in \widehat{S}$, on a $y\hat{e} = n^{1/2}L(\omega_{\hat{e},y\hat{e}})e = n^{1/2}L(y\widehat{\varphi})e$ donc $\widehat{J}y\hat{e} = n^{1/2}L(\widehat{\varphi}y^*)e = n^{1/2}L(y^*\widehat{\varphi})e$, vu que $\widehat{\varphi}$ est une trace sur $\widehat{S}$. Donc $\widehat{J}y\hat{e} = y^*\hat{e}$. Enfin, $J\rho(\omega)\hat{e} = \widehat{J}U\rho(\omega)\hat{e} = \widehat{J}\rho(\omega^*)^*\hat{e} = \rho(\omega^*)\hat{e}$.

Remarquons que, pour $x \in S$, $JxJ \in S'$, $UxU \in S'$ et $\widehat{J}x\widehat{J} = \kappa(x^*) \in S$. De même, pour $y \in \widehat{S}$, $\widehat{J}y\widehat{J} \in \widehat{S}'$, $UyU \in \widehat{S}'$ et $JyJ = \widehat{\kappa}(y^*) \in \widehat{S}$. Donc pour $\omega \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^*$, la restriction à $\widehat{S}$ (resp. S) de la forme $x \mapsto \overline{\omega(JxJ)}$ (resp. $x \mapsto \overline{\omega(\widehat{J}x\widehat{J})}$) ne dépend que de la restriction de ω à $\widehat{S}$ (resp. S). Pour $\xi \in \mathcal{H}$, on a $L(\omega_{\hat{e},\xi})^*e = JL(\omega_{\hat{e},\xi})e = n^{-1/2}J\xi = L(\omega_{\hat{e},J\xi})e$, donc $L(\omega_{\hat{e},\xi})^* = L(\omega_{\hat{e},J\xi})$. De même, $\rho(\omega_{e,\xi})^* = \rho(\omega_{e,\widehat{J}\xi})$. Comme la restriction de toute forme à $\widehat{S}$ (resp. S) coïncide avec un $\omega_{\hat{e},\xi}$ (resp. un

$\omega_{e,\xi}$), on en déduit que, pour tout $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, on a : $L(\omega_{\xi,\eta})^* = L(\omega_{J\xi,J\eta})$ et $\rho(\omega_{\xi,\eta})^* = \rho(\omega_{\widehat{J}\xi,\widehat{J}\eta})$.

1.7. Proposition. — a) *Pour tout* $x \in S$, $y \in \widehat{S}$ *on a :* $\tau(xy) = \tau(x)\tau(y) = \varphi(x)\widehat{\varphi}(y)$.
b) *On a* $(\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})(V_{12}V_{23}) = (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})(V_{23}V_{12}) = \theta_{e,e} \otimes \theta_{\hat{e},\hat{e}}$.
c) *Pour tout* $x \in S$, $y \in \widehat{S}$ *on a :* $L(x\tau) = \tau(x)\theta_{\hat{e},\hat{e}}$ *et* $\rho(y\tau) = \tau(y)\theta_{e,e}$.

Démonstration. — a) On a $\widetilde{V}(xy \otimes 1)\widetilde{V}^* = (x \otimes 1)\widehat{\delta}(y)$. Donc

$$\begin{aligned}\tau(xy) &= (\tau \otimes \tau)(xy \otimes 1)\\ &= (\tau \otimes \tau)(\widetilde{V}(xy \otimes 1)\widetilde{V}^*) \qquad \text{vu que } \tau \otimes \tau \text{ est une trace}\\ &= (\tau \otimes \tau)((x \otimes 1)\widehat{\delta}(y))\\ &= \tau(x(\mathrm{id} \otimes \tau)\widehat{\delta}(y))\\ &= \tau(x)\tau(y).\end{aligned}$$

b) Pour $\omega, \omega' \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^*$, on a $(\omega \otimes \omega')(\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})(V_{12}V_{23}) = \tau(\omega \otimes \mathrm{id} \otimes \omega')(V_{12}V_{23}) = \tau(L(\omega)\rho(\omega')) = \tau(L(\omega))\tau(\rho(\omega'))$ par a). Or $\tau(L(\omega)) = \omega(\rho(\tau))$ et $\tau(\rho(\omega')) = \omega'(L(\tau))$. Donc $(\omega \otimes \omega')(\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})(V_{12}V_{23}) = (\omega \otimes \omega')(\theta_{e,e} \otimes \theta_{\hat{e},\hat{e}})$.

c) Pour $\omega \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^*$, on a $\omega(L(\tau x)) = \tau(x\rho(\omega)) = \tau(x)\omega(L(\tau))$; de même, $\omega(\rho(\tau y)) = \tau(yL(\omega)) = \tau(y)\omega(\rho(\tau))$. □

1.8. Corollaire. — *Si* $p \in S$ *et* $q \in \widehat{S}$ *sont des projecteurs qui commutent, on a* $\dim(p\mathcal{H})\dim(q\mathcal{H}) = n\dim(p\mathcal{H} \cap q\mathcal{H}) = n^2\|pe\|^2\|q\hat{e}\|^2$.

Démonstration. — Cela résulte du calcul de $\tau(pq)$ à l'aide de la proposition 1.7.a). □

Il est facile de donner une description de l'espérance conditionnelle de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ sur S :

1.9. Proposition. — *Pour tout* $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *on a* $E_S(T) = (\mathrm{id} \otimes \omega_{\hat{e},\hat{e}})(\widehat{V}^*(1 \otimes T)\widehat{V})$.

Démonstration. — Il suffit de vérifier cette formule pour $T = ab$ avec $a \in S$ et $b \in \widehat{S}$. On a $(\mathrm{id} \otimes \omega_{\hat{e},\hat{e}})(\widehat{V}^*(1 \otimes T)\widehat{V}) = (\mathrm{id} \otimes \omega_{\hat{e},b\hat{e}})(\widehat{V}^*(1 \otimes a)\widehat{V}) = (\mathrm{id} \otimes \omega_{\hat{e},b\hat{e}})(V(a \otimes 1)V^*) = \tau(b)a$. □

On peut donner d'autres écritures pour E_S par exemple $E_S(T) = (\omega_{\hat{e},\hat{e}} \otimes \mathrm{id})(V(T \otimes 1)V^*) = (\mathrm{id} \otimes \tau)(\widetilde{V}(T \otimes 1)\widetilde{V}^*)$, ainsi que des formules analogues pour $E_{\widehat{S}}$.

On peut remarquer que l'unitaire multiplicatif V (de multiplicité 1) est entièrement déterminé par les algèbres S et $\widehat{S}$ associées et les espaces de ses vecteurs fixes et cofixes : par 1.3, pour $\omega \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^*$, l'opérateur $\rho(\omega)$ est l'unique élément y de $\widehat{S}$ tel que, pour tout $x \in S$ on ait $\omega(x) = n^{1/2}\langle \hat{e}, yxe\rangle$. On peut donner une description plus explicite de V en termes de S, $\widehat{S}$, e et $\hat{e}$:

1.10. PROPOSITION.— *Pour tout $a, x \in S$ et tout $b, y \in \widehat{S}$, on a $\langle xe \otimes y\hat{e}, V(ae \otimes b\hat{e})\rangle = \tau(x^*y^*ab)$.*

Démonstration.— On a $\langle xe \otimes y\hat{e}, V(ae \otimes b\hat{e})\rangle = \langle xe \otimes y\hat{e}, \delta(a)(e \otimes b\hat{e})\rangle = \langle xe, (\mathrm{id} \otimes \omega_{y\hat{e},b\hat{e}})(\delta(a))e\rangle$. Or $(\mathrm{id} \otimes \omega_{y\hat{e},b\hat{e}})(\delta(a)) = (\mathrm{id} \otimes \omega_{\hat{e},\hat{e}})(\widehat{V}^*(1 \otimes y^*ab)\widehat{V}) = E_S(y^*ab)$; donc $\langle xe, (\mathrm{id} \otimes \omega_{y\hat{e},b\hat{e}})(\delta(a))e\rangle = \varphi(x^*E_S(y^*ab)) = \tau(x^*y^*ab)$. □

1.11. COROLLAIRE.— *On a $(J \otimes \widehat{J})V(J \otimes \widehat{J}) = V^*$.*

Démonstration.— Si $a, x \in S$ et $b, y \in \widehat{S}$, on a $\langle (J \otimes \widehat{J})V(J \otimes \widehat{J})(xe \otimes y\hat{e}), ae \otimes b\hat{e}\rangle = \langle (J \otimes \widehat{J})(ae \otimes b\hat{e}), V(J \otimes \widehat{J})(xe \otimes y\hat{e})\rangle = \langle a^*e \otimes b^*\hat{e}, V(x^*e \otimes y^*\hat{e})\rangle = \tau(abx^*y^*) = \langle xe \otimes y\hat{e}, V(ae \otimes b\hat{e})\rangle$. □

2. Une caractérisation des algèbres de Hopf en dualité.

Soit $\mathcal{H}$ un espace hilbertien de dimension finie (non nulle) n. On note τ la trace normalisée de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Soient $A, B \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ deux sous-algèbres involutives unitales. Nous donnons ici des conditions pour que A et B soient des algèbres de Hopf en dualité, *i.e.* les algèbres S et $\widehat{S}$ associées à un unitaire multiplicatif. La première condition que nous imposons est une condition de «carré commutatif»(*cf.* [19]).

2.1. LEMME.— *Soient $A, B \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ deux sous-algèbres involutives unitales telles que, pour tout $(a, b) \in A \times B$, on ait $\tau(ab) = \tau(a)\tau(b)$.*
a) *Soit $\hat{f} \in \mathcal{H}$ de norme 1. Si $\theta_{\hat{f},\hat{f}} \in A$ alors $\hat{f}$ est un vecteur trace pour B.*
b) *Si de plus $\dim B = n$ alors $\theta_{\hat{f},\hat{f}}$ est central dans A.*

Démonstration.— a) Pour $b \in B$, on a $\langle \hat{f}, b\hat{f}\rangle = n\tau(\theta_{\hat{f},\hat{f}}b) = n\tau(\theta_{\hat{f},\hat{f}})\tau(b) = \tau(b)$, d'où a).

b) Par a), $\hat{f}$ est un vecteur séparateur pour B ; comme $\dim B \geqslant \dim \mathcal{H}$, on en déduit que c'est un vecteur totalisateur pour B.

Soit $a \in A$. Pour tout $b \in B$, on a $\langle b^*\hat{f}, a\hat{f}\rangle = n\tau(a\theta_{\hat{f},\hat{f}}b) = n\tau(a\theta_{\hat{f},\hat{f}})\tau(b) = \langle b^*\hat{f},\hat{f}\rangle\langle\hat{f},a\hat{f}\rangle$ donc $a\hat{f} = \langle\hat{f},a\hat{f}\rangle\hat{f}$ (puisque $\hat{f}$ est un totalisateur pour B), donc $a\theta_{\hat{f},\hat{f}} = \langle\hat{f},a\hat{f}\rangle\theta_{\hat{f},\hat{f}}$. Appliquant cela à a^*, on trouve $a\theta_{\hat{f},\hat{f}} = \theta_{\hat{f},\hat{f}}a$. □

Soient $A, B \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ deux sous-algèbres involutives unitales de dimension n telles que, pour tout $(a,b) \in A \times B$, on ait $\tau(ab) = \tau(a)\tau(b)$ et $\hat{f}, f \in \mathcal{H}$ de norme 1 tels que $\theta_{\hat{f},\hat{f}} \in A$ et $\theta_{f,f} \in B$. Remarquons que, comme $\hat{f}$ est un vecteur trace pour B, on a $|\langle\hat{f},f\rangle| = n^{-1/2}$. On supposera désormais que $\langle\hat{f},f\rangle = n^{-1/2}$ (quitte à multiplier $\hat{f}$ par un scalaire de module 1).

On note Λ l'injection canonique de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ dans $L^2(\mathcal{L}(\mathcal{H}),\tau)$. Définissons $Z, Z' : \mathcal{H}\otimes\mathcal{H} \to L^2(\mathcal{L}(\mathcal{H}),\tau)$ par les formules $Z(af\otimes b\hat{f}) = \Lambda(ab)$ et $Z'(af\otimes b\hat{f}) = \Lambda(ba)$. Il est clair que ce sont des isométries, donc des unitaires (par égalité des dimensions). On pose enfin $W = (Z')^*Z$.

2.2. Lemme.— a) *Pour tout $a, x \in A$ et tout $b, y \in B$, on a $\langle xf\otimes y\hat{f}, W(af\otimes b\hat{f})\rangle = \tau(x^*y^*ab)$.*
b) *Pour tout $b \in B$ et tout $a \in A$, on a $n^{1/2}(\omega_{\hat{f},af}\otimes \mathrm{id})(W) = a$ et $n^{1/2}(\mathrm{id}\otimes\omega_{b^*\hat{f},f})(W) = b$.*
c) *Les propriétés suivantes sont équivalentes :* (i) $W \in B\otimes\mathcal{L}(\mathcal{H})$*;* (ii) $W\in\mathcal{L}(\mathcal{H})\otimes A$*;* (iii) $W \in B\otimes A$.

Démonstration.— a) En effet, $\langle xf\otimes y\hat{f}, W(af\otimes b\hat{f})\rangle = \langle Z'(xf\otimes y\hat{f}), Z(af\otimes b\hat{f})\rangle = \langle\Lambda(yx),\Lambda(ab)\rangle$.

b) Pour $a\in A$ et $b, y \in B$, on a $\langle y\hat{f}, n^{1/2}(\omega_{\hat{f},af}\otimes\mathrm{id})(W)b\hat{f}\rangle = n^{1/2}\langle\hat{f}\otimes y\hat{f}, W(af\otimes b\hat{f})\rangle = n\langle\theta_{\hat{f},\hat{f}}f\otimes y\hat{f}, W(af\otimes b\hat{f})\rangle = n\tau(\theta_{\hat{f},\hat{f}}y^*ab) = \langle y\hat{f}, ab\hat{f}\rangle$. Comme $\hat{f}$ est totalisateur pour B, on en déduit la première assertion.

En échangeant les rôles de A et B, on remplace W par $\Sigma W^*\Sigma$, d'où la deuxième assertion.

c) Comme f est totalisateur pour A et $\hat{f}$ séparateur pour B, tout élément de B^* est la restriction d'une forme $\omega_{\hat{f},af}$. Si $W\in B\otimes\mathcal{L}(\mathcal{H})$, pour tout $\omega\in B^*$, on a $(\omega\otimes\mathrm{id})(W)\in A$ par b), donc $W\in B\otimes A$. On a montré (i) $\iff$ (iii). Echangeant les rôles de A et B, on trouve que (ii) $\iff$ (iii). □

Remarquons que sous les hypothèses du lemme 2.2.c), on a $B = \{\,(\mathrm{id}\otimes\omega)(W)\,,\ \omega\in\mathcal{L}(\mathcal{H})^*\,\}$ et $A = \{\,(\omega\otimes\mathrm{id})(W)\,,\ \omega\in\mathcal{L}(\mathcal{H})^*\,\}$.

Notons J_A et J_B les involutions de $\mathcal{H}$ définies par $J_A(af) = a^*f$ et $J_B(b\hat{f}) = b^*\hat{f}$ (pour $a\in A$ et $b\in B$).

2.3. LEMME. — a) *On a* $(J_A \otimes J_B)W(J_A \otimes J_B) = W^*$.

b) *Si* $W \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \otimes A$, *alors* $J_A B J_A = B$ *et* $J_B A J_B = A$.

c) *Dans ce cas,* $J_A J_B = J_B J_A$.

Démonstration. — a) Pour $a, x \in A$ et $b, y \in B$, on a $\langle (J_A \otimes J_B)W(J_A \otimes J_B)(xf \otimes y\hat{f}), af \otimes b\hat{f}\rangle = \langle (J_A \otimes J_B)(af \otimes b\hat{f}), W(J_A \otimes J_B)(xf \otimes y\hat{f})\rangle = \langle a^* f \otimes b^* \hat{f}, W(x^* f \otimes y^* \hat{f})\rangle = \tau(x^* y^* ab) = \langle xf \otimes y\hat{f}, W(af \otimes b\hat{f})\rangle$, d'où a).

b) Pour $b \in B$, on a $J_A b J_A = n^{1/2} J_A((\mathrm{id} \otimes \omega_{b^*\hat{f},f})(W))J_A = n^{1/2}(\mathrm{id} \otimes (J_B \omega_{b^*\hat{f},f} J_B))(W^*) \in B$, d'où la première assertion. La deuxième assertion se démontre de façon analogue.

c) On a $J_A(\hat{f}) = n^{1/2} J_A \theta_{\hat{f},\hat{f}} f = \hat{f}$, donc $J_B J_A b\hat{f} = J_B(J_A b J_A)\hat{f} = (J_A b J_A)^* \hat{f} = J_A J_B b \hat{f}$. □

On suppose désormais que $W \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \otimes A$. On pose $U = J_A J_B$ et $\widehat{W} = \Sigma(U \otimes 1)W(U \otimes 1)\Sigma$.

2.4. LEMME. — *Pour* $x, a \in A$ *et* $b', y' \in B'$, *on a* $\langle y'\hat{f} \otimes xf, \widehat{W}(b'\hat{f} \otimes af)\rangle = \tau(y'^* x^* b' a)$.

Démonstration. — On a $\langle y'\hat{f} \otimes xf, \widehat{W}(b'\hat{f} \otimes af)\rangle = \langle Uxf \otimes y'\hat{f}, W(Uaf \otimes b'\hat{f})\rangle$. Posons $a_1 = J_B a^* J_B$, $x_1 = J_B x^* J_B$, $b = J_B (b')^* J_B$ et $y = J_B (y')^* J_B$. On a $a_1 f = Uaf$, $x_1 f = Uxf$, $b\hat{f} = b'\hat{f}$ et $y\hat{f} = y'\hat{f}$. Donc $\langle y'\hat{f} \otimes xf, \widehat{W}(b'\hat{f} \otimes af)\rangle = \langle x_1 f \otimes y\hat{f}, W(a_1 f \otimes b\hat{f})\rangle = \tau(x_1^* y^* a_1 b) = \tau(J_B(b' a y'^* x^*)^* J_B) = \tau(b' a y'^* x^*)$. □

2.5. LEMME. — a) *Pour tout* $a \in A$ *on a* $Z(a \otimes 1)Z^* = \pi_\tau(a)$.

b) *Pour tout* $a_1, a_2 \in A$ *et* $b_1, b_2 \in B$, *on a* $\langle a_1 f \otimes b_1 \hat{f}, W(\theta_{\hat{f},\hat{f}} \otimes 1)W^*(a_2 f \otimes b_2 \hat{f})\rangle = n^{-1}\langle \hat{f}, b_2 a_2 a_1^* b_1^* \hat{f}\rangle$.

c) *Pour tout* $c_1, c_2 \in A$ *et* $d_1, d_2 \in B'$, *on a* $\langle d_1 \hat{f} \otimes c_1 f, \widehat{W}^*(1 \otimes \theta_{\hat{f},\hat{f}})\widehat{W}(d_2 \hat{f} \otimes c_2 f)\rangle = n^{-1}\langle \hat{f}, d_2 c_2 c_1^* d_1^* \hat{f}\rangle$.

d) *On a* $W(\theta_{\hat{f},\hat{f}} \otimes 1)W^* = \widehat{W}^*(1 \otimes \theta_{\hat{f},\hat{f}})\widehat{W}$.

Démonstration. — a) est clair.

b) Comme $Z'(a_i f \otimes b_i \hat{f}) = \Lambda_\tau(b_i a_i)$, on a

$$\begin{aligned}\langle a_1 f \otimes b_1 \hat{f}, W(\theta_{\hat{f},\hat{f}} \otimes 1)W^*(a_2 f \otimes b_2 \hat{f})\rangle &= \langle (\Lambda_\tau(b_1 a_1), Z(\theta_{\hat{f},\hat{f}} \otimes 1)Z^* \Lambda_\tau(b_2 a_2)\rangle \\ &= \tau(a_1^* b_1^* \theta_{\hat{f},\hat{f}} b_2 a_2) \qquad \text{par a)} \\ &= n^{-1}\langle \hat{f}, b_2 a_2 a_1^* b_1^* \hat{f}\rangle.\end{aligned}$$

c) Remarquons que, comme $A = J_B A J_B$ et $B' = J_B B J_B$, pour tout $a \in A$ et tout $b' \in B'$ on a $\tau(ab') = \tau(a)\tau(b')$. De plus, $\theta_{f,f} \in B'$ et $\theta_{\hat{f},\hat{f}} \in A$. Si on remplace le couple (A, B) par (B', A) on remplace W par $\widehat{W}$ (lemme 2.4) ; donc si on remplace le couple (A, B) par (A, B') on remplace W par $\Sigma\widehat{W}^*\Sigma$; donc c) découle de b).

d) Soient $a_1, a_2 \in A$ et $b_1, b_2 \in B$; notons $c_1, c_2 \in A$ et $d_1, d_2 \in B'$ les éléments tels que $a_i f = d_i \hat{f}$ et $b_i \hat{f} = c_i f$ $(i = 1, 2)$. Remarquons que $U c_i^* f = J_B c_i f = b_i^* \hat{f}$ et $U a_i^* f = d_i^* \hat{f}$. On a :

$$\begin{aligned}\langle a_1 f \otimes b_1 \hat{f}, W(\theta_{\hat{f},\hat{f}} \otimes 1)W^*(a_2 f \otimes b_2 \hat{f})\rangle& \\ &= n^{-1}\langle \hat{f}, b_2 a_2 a_1^* b_1^* \hat{f}\rangle \\ &= n^{-1}\langle a_2^* U c_2^* f, a_1^* U c_1^* f\rangle \\ &= n^{-1}\langle a_2^* f, U(c_2 c_1^*)U a_1^* f\rangle \quad \text{car } U c_i U \in A'. \\ &= n^{-1}\langle d_2^* \hat{f}, (c_2 c_1^*) d_1^* \hat{f}\rangle \\ &= \langle d_1 \hat{f} \otimes c_1 f, \widehat{W}^*(1 \otimes \theta_{\hat{f},\hat{f}})\widehat{W}(d_2 \hat{f} \otimes c_2 f)\rangle\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

2.6. Lemme.— *Notons $\pi : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$ la représentation $x \mapsto (Z')^* \pi_\tau(x) Z'$.*

a) *Pour $a \in A$ et $b \in B$, on a $\pi(a) = W(a \otimes 1)W^*$ et $\pi(b) = (1 \otimes b)$.*

b) *Pour tout $x \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ on a $\pi(x) = \widehat{W}^*(1 \otimes x)\widehat{W}$.*

Démonstration.— a) La deuxième assertion est claire ; la première résulte du lemme 2.5.a).

b) Comme $\widehat{W} \in A \otimes B'$, cette égalité est vraie pour $x \in B$ par a). Par le lemme 2.5.d), cela est aussi vrai pour $x = \theta_{\hat{f},\hat{f}}$. Or $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est engendré par B et $\theta_{\hat{f},\hat{f}}$, d'où le résultat. □

2.7. Proposition.— *Pour tout $a \in A$ on a $W(a \otimes 1)W^* \in A \otimes A$; pour tout $b \in B$ on a $W^*(1 \otimes b)W \in B \otimes B$.*

Démonstration.— Par hypothèse $W(a \otimes 1)W^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \otimes A$; par le lemme 2.6, on a $W(a \otimes 1)W^* = \widehat{W}^*(1 \otimes a)\widehat{W} \in A \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H})$, d'où la première assertion. Quand on échange les rôles de A et B, W est remplacé par $\Sigma W^* \Sigma$; la deuxième assertion résulte donc de la première. □

2.8. Théorème.— *Soient $A, B \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ deux sous-algèbres involutives unitales de dimension n et $\hat{f}, f \in \mathcal{H}$ de norme 1. On suppose que :*

a) *Pour tout* $(a,b) \in A \times B$, *on a* $\tau(ab) = \tau(a)\tau(b)$.

b) $\theta_{\hat{f},\hat{f}} \in A$ *et* $\theta_{f,f} \in B$.

c) *L'unitaire* $W \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$ *défini par* $\langle xf \otimes y\hat{f}, W(af \otimes b\hat{f})\rangle = \tau(x^*y^*ab)$ *pour tout* $a, x \in A$ *et tout* $b, y \in B$, *est contenu dans* $B \otimes \mathcal{L}(H)$.

Alors W *est multiplicatif; les algèbres « S» et « $\widehat{S}$» associées sont* A *et* B *; le vecteur* f *est fixe et le vecteur* $\hat{f}$ *cofixe pour* W.

Démonstration. — On a déjà montré que $\{(\omega \otimes \mathrm{id})(W),\ \omega \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^*\} = A$ et $\{(\mathrm{id} \otimes \omega)(W),\ \omega \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^*\} = B$. Il est clair que pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, on a $W(f \otimes \xi) = f \otimes \xi$ et $W(\xi \otimes \hat{f}) = \xi \otimes \hat{f}$. La seule chose à montrer est que W est multiplicatif.

Par la proposition 2.7, on a $W_{23}W_{12}W_{23}^* \in B\otimes A\otimes A$ et $W_{12}^*W_{23}W_{12} \in B \otimes B \otimes A$; donc $W_{12}^*W_{23}W_{12}W_{23}^* \in B \otimes \mathbb{C} \otimes A$.

Pour $x \in A$ et $\eta \in \mathcal{H}$, comme $W(\hat{f}\otimes\hat{f}) = \hat{f}\otimes\hat{f}$ et $W^*(f\otimes\eta) = f\otimes\eta$, on a

$$\begin{aligned}
&\langle \hat{f} \otimes \hat{f} \otimes f, W_{12}^*W_{23}W_{12}W_{23}^*(xf \otimes f \otimes \eta)\rangle \\
&\qquad = \langle \hat{f} \otimes \hat{f} \otimes f, W_{23}W_{12}(xf \otimes f \otimes \eta)\rangle \\
&\qquad = \langle \hat{f} \otimes f, W((\omega_{\hat{f},xf} \otimes \mathrm{id})(W) \otimes 1)(f \otimes \eta)\rangle \\
&\qquad = n^{-1/2}\langle \hat{f} \otimes f, W(xf \otimes \eta)\rangle \quad \text{lemme 2.2.b)} \\
&\qquad = \langle \hat{f} \otimes \hat{f} \otimes f, W_{13}(xf \otimes f \otimes \eta)\rangle
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit que $W_{12}^*W_{23}W_{12}W_{23}^* = W_{13}$, vu que $\hat{f} \otimes f$ est séparateur pour $B \otimes A$. □

Remarquons que, comme la dimension de A est égale à celle de $\mathcal{H}$, l'unitaire multiplicatif W est irréductible. En fait, comme $U = J_AJ_B$, $(\mathcal{H}, W, U)$ est un système de Kac au sens de [1].

3. Pré-sous-groupes.

Soient $\mathcal{H}$ un espace hilbertien de dimension finie $n \neq 0$ et $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$ un unitaire multiplicatif de multiplicité 1 sur $\mathcal{H}$. On choisit un vecteur fixe e de module 1 et on note $\hat{e}$ le vecteur cofixe tel que $\langle e, \hat{e}\rangle = n^{-1/2}$.

Pour $\xi \in \mathcal{H}$, posons $H_\xi = \{\eta \in \mathcal{H},\ V(\eta \otimes \xi) = \eta \otimes \xi\}$ et $H^\xi = \{\eta \in \mathcal{H},\ V(\xi \otimes \eta) = \xi \otimes \eta\}$.

3.1. LEMME.— *Soit $\xi \in \mathcal{H}$ tel que $\|\xi\| = 1$. Notons ψ l'état vectoriel $\omega_{\xi,\xi}$.*

a) *On a $H^\xi = \{\eta \in \mathcal{H},\ L(\psi)\eta = \eta\}$ et $H_\xi = \{\eta \in \mathcal{H},\ \rho(\psi)\eta = \eta\}$.*

b) *On a $V(H_\xi \otimes H_\xi) \subset \mathcal{H} \otimes H_\xi$ et $V^*(H^\xi \otimes H^\xi) \subset H^\xi \otimes \mathcal{H}$.*

Démonstration.— a) Comme $\|L(\psi)\| \leqslant 1$, on a : $L(\psi)\eta = \eta \iff \langle \eta, L(\psi)\eta\rangle = \|\eta\|^2 \iff \langle \xi \otimes \eta, V(\xi \otimes \eta)\rangle = \|\eta\|^2 \iff V(\xi \otimes \eta) = \xi \otimes \eta$. La même démonstration s'applique pour $\rho(\psi)$.

b) Soient $\eta, \zeta \in H_\xi$. Alors $\eta \otimes \zeta \otimes \xi$ est invariant par V_{13} et V_{23} donc par $V_{13}V_{23} = V_{12}^* V_{23} V_{12}$. Donc $V(\eta \otimes \zeta) \otimes \xi$ est invariant par V_{23} *i.e.* $V(\eta \otimes \zeta) \in \mathcal{H} \otimes H_\xi$.

La deuxième assertion se déduit de la première en remplaçant V par $\Sigma V^* \Sigma$. □

3.2. LEMME.— a) Soient $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \in \mathcal{H}$ tels que $V(\xi_1 \otimes \eta_1) = \xi_1 \otimes \eta_1$ et $V(\xi_2 \otimes \eta_2) = \xi_2 \otimes \eta_2$. On a $L(\omega_{\xi_1,\xi_2})L(\omega_{\eta_1,\eta_2}) = \langle \xi_1, \xi_2\rangle L(\omega_{\eta_1,\eta_2})$ et $\rho(\omega_{\xi_1,\xi_2})\rho(\omega_{\eta_1,\eta_2}) = \langle \eta_1, \eta_2\rangle \rho(\omega_{\xi_1,\xi_2})$.

b) Soient $f, g \in \mathcal{H}$ tels que $V(f \otimes g) = f \otimes g$. Pour tout $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ les opérateurs $L(\omega_{\xi,f})$ et $\rho(\omega_{g,\eta})^*$ commutent.

Démonstration.— a) On a $L(\omega_{\xi_1,\xi_2})L(\omega_{\eta_1,\eta_2}) = L(\omega)$, où $\omega(x) = (\omega_{\xi_1,\xi_2} \otimes \omega_{\eta_1,\eta_2})(V^*(1 \otimes x)V) = \langle V(\xi_1 \otimes \eta_1), (1 \otimes x)V(\xi_2 \otimes \eta_2)\rangle = \langle \xi_1, \xi_2\rangle \omega_{\eta_1,\eta_2}(x)$. De même, $\rho(\omega_{\xi_1,\xi_2})\rho(\omega_{\eta_1,\eta_2}) = \rho(\omega)$, où $\omega(x) = (\omega_{\xi_1,\xi_2} \otimes \omega_{\eta_1,\eta_2})(V(x \otimes 1)V^*) = \langle V^*(\xi_1 \otimes \eta_1), (x \otimes 1)V^*(\xi_2 \otimes \eta_2)\rangle = \langle \eta_1, \eta_2\rangle \omega_{\xi_1,\xi_2}(x)$.

b) On a

$$
\begin{aligned}
L(\omega_{\xi,f})\rho(\omega_{g,\eta})^* &= (\omega_{\xi,f} \otimes \mathrm{id} \otimes \omega_{\eta,g})(V_{12}V_{23}^*) \\
&= (\omega_{\xi,f} \otimes \mathrm{id} \otimes \omega_{\eta,g})(V_{23}^* V_{12} V_{13}) \\
&= (\omega_{\xi,f} \otimes \mathrm{id} \otimes \omega_{\eta,g})(V_{23}^* V_{12})
\end{aligned}
$$

vu que $V(f \otimes g) = f \otimes g$. Or $(\omega_{\xi,f} \otimes \mathrm{id} \otimes \omega_{\eta,g})(V_{23}^* V_{12}) = \rho(\omega_{g,\eta})^* L(\omega_{\xi,f})$. □

3.3. PROPOSITION.— *Soit $f \in \mathcal{H}$, $\|f\| = 1$ tel que $V(f \otimes f) = f \otimes f$. Notons ψ l'état $\psi = \omega_{f,f}$.*

a) *L'opérateur $L(\psi)$ est le projecteur sur H^f ; l'opérateur $\rho(\psi)$ est le projecteur sur H_f. Ces deux projecteurs commutent.*

b) *Pour tout $\xi \in H_f \otimes H^f$, $V\xi = \xi$.*

c) *On a* $L(\psi)e = \theta_{f,f}e$, $\rho(\psi)\hat{e} = \theta_{f,f}\hat{e}$, $\langle e,\hat{e}\rangle = \langle e,f\rangle\langle f,\hat{e}\rangle$ *et* $Jf = \widehat{J}f = Uf = f$ *si* $\langle f,e\rangle \in \mathbb{R}$.

d) *On a* $H^f \cap H_f = \mathbb{C}f$ *et* $\dim(H^f)\dim(H_f) = \dim(\mathcal{H})$. *De plus* $|\langle e,f\rangle|^2 \dim(H_f) = |\langle \hat{e},f\rangle|^2 \dim(H^f) = 1$.

Démonstration. — a) Par le lemme 3.2.a), $L(\psi)$ et $\rho(\psi)$ sont des idempotents. Comme $\|L(\psi)\| \leqslant 1$ et $\|\rho(\psi)\| \leqslant 1$, ce sont des projecteurs. Les égalités $L(\psi)\mathcal{H} = H^f$ et $\rho(\psi)\mathcal{H} = H_f$ résultent du lemme 3.1.a). Par le lemme 3.2.b), les projecteurs $L(\psi)$ et $\rho(\psi) = \rho(\psi)^*$ commutent.

b) Pour $\xi \in H^f$, $\zeta \in H_f$, $\zeta \otimes f \otimes \xi$ est invariant par V_{12} et par V_{23} donc par V_{13}.

c) On a $\langle e, L(\psi)e\rangle = \varphi(L(\psi)) = \psi(\rho(\varphi))$. Or $\rho(\varphi)$ étant le projecteur sur l'espace des vecteurs fixes, par hypothèse réduit à $\mathbb{C}e$, on en déduit $\langle e, L(\psi)e\rangle = |\langle f,e\rangle|^2 = \langle e, \theta_{f,f}e\rangle$. Comme $L(\psi) - \theta_{f,f}$ est positif, on a $L(\psi)e = \theta_{f,f}e$. L'égalité $\rho(\psi)\hat{e} = \theta_{f,f}\hat{e}$ s'en déduit en remplaçant V par $\Sigma V^*\Sigma$. De plus, comme l'image du projecteur $\rho(\varphi) = \theta_{e,e}$ est contenue dans H_f, on a $\rho(\varphi) = \rho(\varphi)\rho(\psi)$, donc $\langle e,\hat{e}\rangle e = \rho(\varphi)\hat{e} = \rho(\varphi)\rho(\psi)\hat{e} = \rho(\varphi)(\langle f,\hat{e}\rangle f) = \langle e,f\rangle\langle f,\hat{e}\rangle e$.

On a $JL(\psi)e = L(\psi)^*e = L(\psi)e$, $\widehat{J}L(\psi)e = L(\psi^*)e = L(\psi)e$. Comme e est séparateur pour S, $L(\psi)e \neq 0$; donc $Jf = \widehat{J}f = f$, vu que f est proportionnel à $L(\psi)e$. Donc $Uf = \widehat{J}Jf = f$.

d) On a $\psi(\rho(\tau)) = \tau(L(\psi))$. Mais $\rho(\tau) = \theta_{e,e}$; donc $\psi(\rho(\tau)) = |\langle f,e\rangle|^2$. D'autre part, $n\tau(L(\psi))$ est la dimension de H^f (où $n = \dim\mathcal{H}$). Donc $\dim H^f = n|\langle e,f\rangle|^2 = n|\langle\hat{e},e\rangle|^2|\langle\hat{e},f\rangle|^{-2}$ par c); donc $|\langle\hat{e},f\rangle|^2\dim(H^f) = 1$. De même, $|\langle e,f\rangle|^2\dim(H_f) = 1$. On en déduit que $n^{-1}\dim H^f \dim H_f = |\langle\hat{e},e\rangle|^2 \dim H^f \dim H_f = |\langle\hat{e},f\rangle|^2\dim(H^f)|\langle e,f\rangle|^2$ $\dim(H_f) = 1$. Or par le corollaire. 1.8, $\dim H_f \cap H^f = n^{-1}\dim H_f \dim H^f$.

□

3.4. DÉFINITION. — *On appelle pré-sous-groupe de* V *tout vecteur* $f \in \mathcal{H}$, *tel que* $\|f\| = 1$, $\langle f,e\rangle > 0$, $V(f\otimes f) = f\otimes f$. *Si* f *est un pré-sous-groupe, les projecteurs* $L(\omega_{f,f})$ *et* $\rho(\omega_{f,f})$ *se notent simplement* L_f *et* ρ_f.

Par hypothèse e et $\hat{e}$ sont des pré-sous-groupes.

Exemple. — Soit G un groupe fini. Notons $V \in \mathcal{L}(\ell^2(G)\otimes\ell^2(G))$ son unitaire multiplicatif, donné par la formule $(V\xi)(s,t) = \xi(st,t)$, pour tout $\xi \in \ell^2(G)\otimes\ell^2(G) = \ell^2(G\times G)$, $s,t \in G$. Soit Γ un sous-groupe de G; alors $|\Gamma|^{-1/2}\chi_\Gamma$ est un pré-sous-groupe de V, où χ_Γ désigne la fonction caractéristique de Γ. Inversement, soit $f \in \ell^2(G)$ un pré-sous-groupe; alors, $\|f\| = 1$, $f(1) = \langle \hat{e}, f\rangle \in \mathbb{R}_+$ et, pour tout $s,t \in G$, on a $f(s)f(t) = f(st)f(t)$; alors, l'ensemble $\Gamma = \{ s \in G,\ f(s) \neq 0 \}$ est stable par le produit de G; comme G est fini (et $f \neq 0$), Γ est un sous-groupe de G; de plus, pour tout $s,t \in \Gamma$, on a $f(st) = f(s)$; donc $f = |\Gamma|^{-1/2}\chi_\Gamma$. On voit alors que H^f est l'ensemble des fonctions supportées par Γ et H_f est l'ensemble des fonctions invariantes à droite par Γ. La relation $\dim(H^f)\dim(H_f) = \dim(\mathcal{H})$ (prop. 3.3.d) est le théorème de Lagrange.

3.5. Proposition. — *Soient f,g des pré-sous-groupes.*

a) *On a $L(\omega_{f,g})^2 = \langle f,g\rangle L(\omega_{f,g})$ et $\rho(\omega_{f,g})^2 = \langle f,g\rangle \rho(\omega_{f,g})$. On a $L(\omega_{f,g}) = L(\omega_{f,g})^*$ et $\rho(\omega_{f,g}) = \rho(\omega_{f,g})^*$.*

b) *Les opérateurs $L(\omega_{f,g})$ et ρ_g commutent. Les opérateurs $\rho(\omega_{f,g})$ et L_f commutent.*

On note $H^{f,g}$ l'image de $L(\omega_{f,g})$ et $H_{g,f}$ celle de $\rho(\omega_{g,f})$.

c) *On a $\dim(H^{f,g} \cap H_g)\dim(H^g) = \dim(H^{f,g})$ et $\dim(H_{g,f} \cap H^g)\dim(H_g) = \dim(H_{g,f})$.*

d) *On a $\dim(H^{f,g}\cap H_g)\langle f,g\rangle\langle g,e\rangle = \langle f,e\rangle$ et $\dim(H_{g,f}\cap H^g)\langle f,g\rangle\langle f,e\rangle = \langle g,e\rangle$; en particulier, $\langle f,g\rangle > 0$.*

e) *On a $\dim(H^{f,g} \cap H_g)\dim(H_{g,f} \cap H^g) = \langle f,g\rangle^{-2}$.*

f) *On a $H^f \subset H^{f,g}$, $H^g \subset H^{f,g}$, $H_f \subset H_{g,f}$ et $H_g \subset H_{g,f}$.*

Démonstration. — a) Les deux premières assertions résultent du lemme 3.2.a); les deux dernières de la proposition 3.3.c) et de 1.6.

b) résulte du lemme 3.2.b).

c) Il résulte du corollaire 1.8, et de b) que $n\dim(H^{f,g} \cap H_g) = \dim(H^{f,g})\dim H_g$. Or $n = \dim H_g \dim H^g$. La deuxième assertion se démontre de manière analogue.

d) De c) on déduit que $\langle f,g\rangle \dim(H^{f,g} \cap H_g)\dim(H^g) = \langle f,g\rangle \dim H^{f,g} = n\tau(L(\omega_{f,g})) = n\omega_{f,g}(\rho(\tau)) = n\langle f,e\rangle\langle g,e\rangle$, donc $\langle f,g\rangle \dim(H^{f,g} \cap H_g) = \dim H_g\langle f,e\rangle\langle g,e\rangle$. On en déduit la première assertion vu que $\langle g,e\rangle^2 \dim H_g = 1$. La deuxième assertion se démontre de manière analogue, vu que $\langle f,e\rangle\langle f,\hat{e}\rangle = \langle g,e\rangle\langle g,\hat{e}\rangle$.

e) résulte immédiatement de d).

f) On a $L(\omega_{f,g})L_f e = \langle f,e\rangle L(\omega_{f,g})^* f = \langle f,e\rangle\langle f,g\rangle f = \langle f,g\rangle L_f e$. De même, $L(\omega_{f,g})L_g e = \langle g,e\rangle L(\omega_{f,g}) g = \langle g,e\rangle\langle f,g\rangle g = \langle f,g\rangle L_g e$. On en déduit que $L(\omega_{f,g})L_f = \langle f,g\rangle L_f$ et $L(\omega_{f,g})L_g = \langle f,g\rangle L_g$, vu que e est séparateur pour S, d'où les premières assertions, vu que $\langle f,g\rangle \neq 0$ (par d). Les autres assertions s'en déduisent en remplaçant V par $\Sigma V^*\Sigma$. □

3.6. Corollaire. — *Il y a un nombre fini de pré-sous-groupes pour V.*

Démonstration. — Il résulte immédiatement de la proposition précédente que, si f et g sont des pré-sous-groupes distincts, $\langle f,g\rangle^{-2}$ est entier, donc $\langle f,g\rangle \leqslant 2^{-1/2}$, donc $\|f-g\|^2 \geqslant 2-\sqrt{2}$, d'où le résultat. □

3.7. Proposition. — a) *Soient f et g des pré-sous-groupes. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) $V(f\otimes g) = f\otimes g$. (ii) $H^g \subset H^f$. (iii) $H_f \subset H_g$. (iv) $H^{f,g} = H^f$;
(v) $H^{g,f} = H^f$; (vi) $H_{f,g} = H_g$; (vii) $H_{g,f} = H_g$;
Si f et g vérifient ces conditions, nous écrirons $g \prec f$.

b) *La relation $\prec$ est une relation d'ordre sur l'ensemble des pré-sous-groupes de V, pour laquelle e est le plus grand élément et $\hat{e}$ est le plus petit élément.*

Démonstration. — a) (ii)$\Rightarrow$(i) résulte de ce que $g \in H^g$. Si (i) est vérifiée, pour tout $\xi \in H^g$, on a $V(f\otimes\xi) = f\otimes\xi$ par la proposition 3.3.b), donc (i)$\Rightarrow$(ii). (i) $\Longleftrightarrow$ (iii) en résulte remplaçant V par $\Sigma V^*\Sigma$. Par la proposition 3.5.f), (iv)$\Rightarrow$(ii), (v)$\Rightarrow$(ii), (vi)$\Rightarrow$(iii) et (vii)$\Rightarrow$(iii). Si (i) est satisfaite, par le lemme 3.2.a), $L_f L(\omega_{f,g}) = L(\omega_{f,g})$, $L_f L(\omega_{g,f}) = L(\omega_{g,f})$, $\rho(\omega_{f,g})\rho_g = \rho(\omega_{f,g})$, $\rho(\omega_{g,f})\rho_g = \rho(\omega_{g,f})$, donc (i) implique les relations (iv) à (vii).

b) Il est clair, par la condition (ii) que $\prec$ est une relation de préordre. Si $f \prec g$ et $g \prec f$, on a $g \in H^f \cap H_f = \mathbb{C}f$. Comme $\|f\| = \|g\| = 1$, $\langle e,f\rangle > 0$ et $\langle e,g\rangle > 0$, $f = g$. Il est clair enfin que e est le plus grand élément et $\hat{e}$ le plus petit. □

3.8. Proposition. — *Soient f et g deux pré-sous-groupes. Si le nombre entier $\langle f,g\rangle^{-2}$ est premier alors f et g sont comparables.*

Démonstration. — Par la proposition 3.5.e) un des nombres $\dim(H^{f,g} \cap H_g)$ ou $\dim(H_{g,f} \cap H^g)$ est égal à 1 ; le résultat découle alors des propositions 3.5.c) et 3.7.a) (conditions (v) et (vii)). □

3.9. PROPOSITION. — *Soient* f , g *des pré-sous-groupes tels que* $g \prec f$.

a) $\rho_g L_f = L_f \rho_g$ *est le projecteur sur* $H_g \cap H^f$.

b) *On a* $L_g f = \langle g, f \rangle g$, $\langle g, e \rangle = \langle g, f \rangle \langle f, e \rangle$.

c) *On a* $\dim(H^f)\dim(H_g) = n\dim(H_g \cap H^f)$ *et* $\dim(H_g \cap H^f) \langle f, g \rangle^2 = 1$.

Démonstration. — a) résulte du lemme 3.2.b).

b) On a $L_f e = \theta_{f,f} e = \langle f, e \rangle f$. De même $L_g e = \langle g, e \rangle g$. Comme $L_g = L_g L_f$, on en déduit que $\langle f, e \rangle L_g f = \langle g, e \rangle g$. Comme $L_g f$ est colinéaire à g, $L_g f = \langle g, f \rangle g$. On a alors $\langle g, f \rangle \langle f, e \rangle g = \langle f, e \rangle L_g f = L_g e = \langle g, e \rangle g$.

c) La première assertion se déduit immédiatement du corollaire 1.8. La deuxième de la proposition 3.5.e) et de 3.3.d), vu que $H^{f,g} = H^f$ et $H_{g,f} = H_g$.

□

3.10. LEMME. — *Soit* ψ *un état sur* $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ *tel que* $L(\psi)$ *soit un projecteur. Alors* $V(L(\psi)e \otimes L(\psi)e) = L(\psi)e \otimes L(\psi)e$.

Démonstration. — La restriction de ψ à $\widehat{S}$ est de la forme $x\widehat{\varphi}$, où x est un élément positif de $\widehat{S}$. Posons $\xi = x^{1/2}\hat{e}$. Les restrictions de ψ et $\omega_{\xi,\xi}$ à $\widehat{S}$ coïncident, donc $L(\psi) = L(\omega_{\xi,\xi})$. On peut donc supposer que $\psi = \omega_{\xi,\xi}$. Par le lemme 3.1.a), $L(\psi)\mathcal{H} = H^\xi$.

Posons $\eta = L(\psi)e$; par le lemme 3.1.b), $V(\xi \otimes e) \in \mathcal{H} \otimes H_\eta$, d'où $\eta = L(\omega_{\xi,\xi})e \in H_\eta$. □

3.11. PROPOSITION. — a) *Pour un projecteur orthogonal non nul* $p \in S$ *les conditions suivantes sont équivalentes : (i)* $p \otimes p \leqslant \delta(p)$. *(ii)* $\delta(p)(1 \otimes p) = p \otimes p$. *(iii)* $\delta(p)(p \otimes 1) = p \otimes p$. *(iv)* $\rho(\omega_{e,pe}) \geqslant 0$. *(v)* $\varphi(p)^{-1}\rho(\omega_{e,pe})$ *est un projecteur orthogonal. (vi)* $f = \|pe\|^{-1}pe$ *est un pré-sous-groupe et* $p = L_f$.

b) *Pour un projecteur orthogonal non nul* $p \in \widehat{S}$ *les conditions suivantes sont équivalentes : (i)* $p \otimes p \leqslant \widehat{\delta}(p)$. *(ii)* $\widehat{\delta}(p)(1 \otimes p) = p \otimes p$. *(iii)* $\widehat{\delta}(p)(p \otimes 1) = p \otimes p$. *(iv)* $L(\omega_{\hat{e},p\hat{e}}) \geqslant 0$. *(v)* $\widehat{\varphi}(p)^{-1}L(\omega_{\hat{e},p\hat{e}})$ *est un projecteur orthogonal. (vi)*$f = \|p\hat{e}\|^{-1}p\hat{e}$ *est un pré-sous-groupe et* $p = \rho_f$.

Démonstration. — Montrons a). Remplaçant V par $\Sigma V^*\Sigma$, on en déduit b).

(i) $\Rightarrow$ (vi). On a $(p \otimes p)V(pe \otimes pe) = (p \otimes p)\delta(p)(1 \otimes p)(e \otimes e) = pe \otimes pe$, d'où il ressort, comme $\|V(pe \otimes pe)\| = \|pe \otimes pe\|$ que $V(pe \otimes pe) = pe \otimes pe$. Par ailleurs $pe \neq 0$, puisque e est séparateur pour S. Il s'ensuit que $f = 1/\|pe\| pe$ est un pré-sous-groupe. On a $L_f(e) = \langle f, e \rangle f = pe$, donc $L_f = p$.

(vi)$\Rightarrow$(v). Si $p = L_f$, $\rho(\omega_{e,pe}) = \langle e, f \rangle \rho(\omega_{e,f}) = \langle e, f \rangle^2 \rho_f$ par la proposition 3.7.a), condition (vi).

(v)$\Rightarrow$(iv) est clair.

(iv)$\Rightarrow$(ii). Si (iv) est vérifiée, il existe une forme positive ψ telle que $p = L(\psi)$ (prop. 1.4). Comme $p \neq 0$, $\psi(1) \neq 0$; or $\varepsilon : L(\omega) \mapsto \omega(1)$ est un caractère sur S; donc $\psi(1) = \varepsilon(p) = 1$. Par le lemme 3.10, $(\delta(p)(1 \otimes p)(e \otimes e) = V(pe \otimes pe) = pe \otimes pe$, d'où (ii), vu que $e \otimes e$ est séparateur pour $S \otimes S$.

Il est clair que (ii) implique (i).

En changeant V en $(U \otimes 1)V^*(U \otimes 1)$, on change δ en $\sigma \circ \delta$. De (i) $\Longleftrightarrow$ (ii), on déduit que (i) $\Longleftrightarrow$ (iii). $\square$

3.12. Corollaire. — *Soient $p \in S$ et $q \in \widehat{S}$ des projecteurs tels que $p\hat{e} \neq 0$, $qe \neq 0$, $pq = qp$ et $\tau(pq) = 1/n$. Alors $\|pe\|^{-1} pe = \|q\hat{e}\|^{-1} q\hat{e}$; c'est un pré-sous-groupe f et l'on a $p = L_f$ et $q = \rho_f$.*

Démonstration. — Comme $\theta_{\hat{e},\hat{e}}$ est central dans S, on a $p\hat{e} = \hat{e}$; de même, $qe = e$. On a alors $\langle pe, q\hat{e} \rangle = \langle e, pq\hat{e} \rangle = \langle qe, p\hat{e} \rangle = n^{-1/2}$. Or $\|pe\|^2 = \tau(p)$ et $\|q\hat{e}\|^2 = \tau(q)$; donc $\|pe\| \|q\hat{e}\| = n^{-1/2}$. Donc pe et $q\hat{e}$ sont (positivement) proportionnels. Alors $p = n^{1/2} L(\omega_{\hat{e},pe})$ est proportionnel à $L(\omega_{\hat{e},q\hat{e}})$, d'où l'on déduit que q est de la forme ρ_f (prop. 3.11.b), condition (iv)). Comme $L_f e$ est proportionnel à f, on en déduit que $p = L_f$. $\square$

3.13. Proposition. — a) *Soit ψ un état sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Il existe des pré-sous-groupes f, g tels que $\{ \xi \in \mathcal{H},\ L(\psi)\xi = \xi \} = H^f$ et $\{ \xi \in \mathcal{H},\ \rho(\psi)\xi = \xi \} = H_g$.*

b) *Soit K un sous-espace non nul de $\mathcal{H}$. Il existe des pré-sous-groupes f, g tels que $\{ \xi \in \mathcal{H},\ V(\zeta \otimes \xi) = \zeta \otimes \xi,\ \forall \zeta \in K \} = H^f$ et $\{ \xi \in \mathcal{H},\ V(\xi \otimes \zeta) = \xi \otimes \zeta,\ \forall \zeta \in K \} = H_g$.*

Démonstration. — a) Notons $C = \{ x \in S,\ \rho(\omega_{e,xe}) \geqslant 0 \}$. Par la proposition 1.4.a), $(1 + L(\psi))^k 2^{-k} \in C$, donc sa limite, qui est le projecteur orthogonal p sur $\{ \xi \in \mathcal{H},\ L(\psi)\xi = \xi \}$ aussi. L'assertion sur f résulte alors de la proposition 3.11.a) (condition (iv)). L'assertion sur g s'en déduit en remplaçant V par $\Sigma V^*\Sigma$.

b) Il suffit d'appliquer a) à l'état $\psi = k^{-1}\sum_i \omega_{\zeta_i,\zeta_i}$ où $\{\zeta_i\,,\ i = 1,\ldots,k\}$ est une base orthonormale de K. □

3.14. Corollaire. — *L'ensemble des pré-sous-groupes ordonné par $\prec$ est un treillis. Plus précisément, étant donné des pré-sous-groupes f et f', il existe des pré-sous-groupes g et g' tels que $H^f \cap H^{f'} = H^g$ et $H_f \cap H_{f'} = H_{g'}$.*

Démonstration. — Appliquons la proposition 3.13.b) à $K = \mathbb{C}f+\mathbb{C}f'$. Soient g, g' des pré-sous-groupes tels que $H^f \cap H^{f'} = H^g$ et $H_f \cap H_{f'} = H_{g'}$; il est clair qu'alors $g = \inf(f, f')$ et $g' = \sup(f, f')$. □

Rappelons qu'une représentation de V dans un espace hilbertien K est donnée par un unitaire $X \in \mathcal{L}(K \otimes \mathcal{H})$ tel que $X_{12}X_{13}V_{23} = V_{23}X_{12} \in \mathcal{L}(K \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$. Comme toute représentation est un sous-multiple de la régulière, on a évidemment :

3.15. Corollaire. — *Soient $X \in \mathcal{L}(K \otimes \mathcal{H})$ une représentation de V et $\xi \in K$. Il existe un pré-sous-groupe f tel que $\{\eta \in \mathcal{H},\ X(\xi \otimes \eta) = (\xi \otimes \eta)\} = H^f$.* □

3.16. Proposition. — *Soit ψ un état de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.*

a) *Les ensembles des valeurs propres de module 1 de $L(\psi)$ et de $\rho(\psi)$ sont des sous-groupes de $U(1)$; en particulier les valeurs propres de module 1 de $L(\psi)$ et de $\rho(\psi)$ sont des racines de l'unité.*

b) *Il existe des pré-sous-groupes f et g tels que l'espace engendré par les vecteurs propres de $L(\psi)$ (resp. $\rho(\psi)$) associés aux valeurs propres de module 1 soit H^f (resp. H_g).*

Démonstration. — Il suffit d'établir les énoncés relatifs à $L(\psi)$; les énoncés relatifs à $\rho(\psi)$ s'en déduisent en remplaçant V par $\Sigma V^*\Sigma$.

a) La restriction de ψ à $\widehat{S}$ coïncide avec celle d'un état vectoriel $\omega_{\zeta,\zeta}$. Un nombre complexe λ de module 1 est valeur propre de $L(\psi)$ si et seulement s'il existe $\xi \in \mathcal{H}$ non nul tel que $V(\zeta \otimes \xi) = \lambda(\zeta \otimes \xi)$. Soit G l'ensemble des valeurs propres de module 1 de $L(\psi)$. Si $\lambda, \lambda' \in G$, il existe ξ et η non-nuls avec $V(\zeta \otimes \xi) = \lambda'(\zeta \otimes \xi)$ et $V(\zeta \otimes \eta) = \lambda(\zeta \otimes \eta)$; on a alors $V_{12}V_{13}(\zeta \otimes \xi \otimes \eta) = \lambda\lambda'(\zeta \otimes \xi \otimes \eta)$ donc $\lambda\lambda'$ est valeur propre de $(\psi \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(V_{12}V_{13})$ donc de $L(\psi) \otimes 1$ qui lui est conjugué. De plus 1 est valeur propre de vecteur propre associé $\hat{e}$. Comme G est un sous-semi-groupe compact (fini) de $U(1)$, c'est un sous-groupe.

b) Soit ψ' l'état de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que $L(\psi') = L(\psi)^k$ où k est l'ordre du groupe cyclique G. L'espace engendré par les vecteurs propres de $L(\psi)$ associés aux valeurs propres de module 1 est l'espace propre de $L(\psi')$ pour la valeur propre 1; il résulte de la proposition 3.13.a) qu'il est de la forme H^f. □

4. Pré-sous-groupes et sous-algèbres coïdéales.

Dans ce paragraphe, nous allons établir une correspondance naturelle entre les pré-sous-groupes de V et les sous-algèbres coïdéales (*cf. e.g.* [17]) de la C^*-algèbre de Hopf associée S. Nous donnons ensuite dans notre cadre une démonstration très simple de résultats de [16], ainsi que d'autres résultats analogues.

Commençons par rappeler la définition des sous-algèbres coïdéales dans une algèbre de Hopf.

4.1. Définition ([17]).— *Soit (A, δ) une algèbre de Hopf unifère. Une sous-algèbre B de A contenant l'unité est dite coïdéale à droite (resp. à gauche) si $\delta(B) \subset B \otimes A$ (resp. $\delta(B) \subset A \otimes B$).*

Revenons à présent aux algèbres de Hopf associées à notre unitaire multiplicatif V de multiplicité 1. Si f est un pré-sous-groupe on pose $R_f = UL_fU$ et $\lambda_f = U\rho_fU$. Posons aussi $G_f = \{x \in S,\ xe \in H_f\}$, $D_f = \{x \in S,\ xe \in UH_f\}$, $\widehat{D}_f = \{x \in \widehat{S},\ x\hat{e} \in H^f\}$ et $\widehat{G}_f = \{x \in \widehat{S},\ x\hat{e} \in UH^f\}$.

4.2. Proposition.— *Soit f un pré-sous-groupe.*

a) *On a $G_f = \{L(\omega_{\xi,f})^*,\ \xi \in \mathcal{H}\} = \{x \in S,\ [x, \rho_f] = 0\} = \{x \in S,\ \delta(x)(1 \otimes L_f) = x \otimes L_f\}$. C'est une sous-algèbre coïdéale à gauche de S, stable par l'involution.*

b) *On a $D_f = \{L(\omega_{f,\xi}),\ \xi \in \mathcal{H}\} = \{x \in S,\ [x, \lambda_f] = 0\} = \{x \in S,\ \delta(x)(L_f \otimes 1) = L_f \otimes x\}$. C'est une sous-algèbre coïdéale à droite de S, stable par l'involution.*

c) *On a $\widehat{D}_f = \{\rho(\omega_{f,\xi}),\ \xi \in \mathcal{H}\} = \{x \in \widehat{S},\ [x, L_f] = 0\} = \{x \in \widehat{S},\ \hat{\delta}(x)(\rho_f \otimes 1) = \rho_f \otimes x\}$. C'est une sous-algèbre coïdéale à droite de $\widehat{S}$, stable par l'involution.*

d) *On a* $\widehat{G}_f = \{ \rho(\omega_{\xi,f})^*\,,\ \xi \in \mathcal{H} \} = \{ x \in \widehat{S}\,,\ [x, R_f] = 0 \} = \{ x \in \widehat{S}\,,\ \hat{\delta}(x)(1 \otimes \rho_f) = x \otimes \rho_f \}$. *C'est une sous-algèbre coïdéale à gauche de* $\widehat{S}$, *stable par l'involution.*

Démonstration. — a) Par le lemme 3.2.b), on a $\{ L(\omega_{\xi,f})^*\,,\ \xi \in \mathcal{H} \} \subset \{ x \in S\,,\ [x, \rho_f] = 0 \}$. Si $x\rho_f = \rho_f x$, on a $xe = x\rho_f e \in H_f$, donc $x \in G_f$. Soit $x \in G_f$. Alors, par 1.3, $\kappa(x) = n^{1/2} L(\omega_{\hat{e},Uxe})$, donc $x = n^{1/2} L(\omega_{Uxe,\hat{e}})^*$; or $L(\omega_{Uxe,\hat{e}})^* = (\omega_{\hat{e},Uxe} \otimes \mathrm{id})(V^*) = (\omega_{\hat{e},U\rho_f xe} \otimes \mathrm{id})(V^*) = (\omega_{\hat{e},Uxe} \otimes \mathrm{id})(V^*(\lambda_f \otimes 1)) = (\omega_{\hat{e},Uxe} \otimes \mathrm{id})((\lambda_f \otimes 1)V^*) = L(\omega_{Uxe,\lambda_f \hat{e}})^*$. Or $\lambda_f \hat{e}$ est proportionnel à f, donc $x \in \{ L(\omega_{\xi,f})^*\,,\ \xi \in \mathcal{H} \}$. Enfin, pour $x \in S\,,\ \delta(x)(1 \otimes L_f) = x \otimes L_f \iff \delta(x)(1 \otimes L_f)(e \otimes e) = xe \otimes L_f e \iff V(xe \otimes f) = xe \otimes f \iff xe \in H_f$.

Il est clair que $G_f = \{ x \in S\,,\ [x, \rho_f] = 0 \}$ est une sous-algèbre involutive unitale de S. Si $x \in G_f$, on a $\delta(x)(e \otimes e) = V(x \otimes 1)(e \otimes e) \in V(H_f \otimes H_f) \subset \mathcal{H} \otimes H_f)$ par le lemme 3.1; donc $\delta(x) \in S \otimes G_f$.

b), c) et d) se déduisent de a) en remplaçant successivement V par $(U \otimes 1)V^*(U \otimes 1)$, $\Sigma V^* \Sigma$ et $\widetilde{V}$. □

Notons que $G_f = \kappa(D_f) = \widehat{J} D_f \widehat{J}$ et $\widehat{G}_f = \widehat{\kappa}(\widehat{D}_f) = J \widehat{D}_f J$.

4.3. Proposition.— a) *L'application* $f \mapsto D_f$ *(resp.* $f \mapsto G_f$*) est une bijection entre pré-sous-groupes et sous-algèbres coïdéales à droite (resp à gauche) de l'algèbre de Hopf* S. *L'application* $f \mapsto \widehat{D}_f$ *(resp.* $f \mapsto \widehat{G}_f$*) est une bijection entre pré-sous-groupes et sous-algèbres coïdéales à droite (resp à gauche) de l'algèbre de Hopf* $\widehat{S}$.

b) *Toute sous-algèbre coïdéale (à gauche ou à droite) de* S *est stable par l'involution de* S.

Démonstration. — a) Soit B une sous-algèbre coïdéale à droite de S. Posons $H = Be$. Par hypothèse, pour $x \in B$ et $\xi \in \mathcal{H}$, on a $V(xe \otimes \xi) = \delta(x)(e \otimes \xi) \in H \otimes \mathcal{H}$. Donc $V(H \otimes \mathcal{H}) = H \otimes \mathcal{H}$. Notons p le projecteur sur H. Le projecteur $p \otimes 1$ commute à V, donc $p \in U\widehat{S}U$. De plus, pour $x, y \in B$, on a $\widehat{V}^*(xe \otimes ye) = \delta(y)(xe \otimes e) \in H \otimes \mathcal{H}$. Donc $H \otimes H \subset \widehat{V}(H \otimes \mathcal{H})$, donc $p \otimes p \leqslant \widehat{V}(p \otimes 1)\widehat{V}^*$. Il résulte alors de la proposition 3.11 (appliquée à $\widehat{V}$), qu'il existe un pré-sous-groupe f tel que $p = \lambda_f$, donc $B = D_f$.

Si B est une sous-algèbre coïdéale à gauche, $\kappa(B)$ est une sous-algèbre coïdéale à droite; l'assertion resp. s'en déduit. Les autres assertions s'en déduisent en remplaçant V par $\widetilde{V}$.

b) se déduit immédiatement de a) et de la proposition 4.2. □

Comme e est un vecteur totalisateur et séparateur pour S, on a $\dim D_f = \dim UH_f = \dim H_f = \dim G_f$; comme $\hat{e}$ est un vecteur totalisateur et séparateur pour $\widehat{S}$, on a $\dim \widehat{D}_f = \dim H^f = \dim UH^f = \dim \widehat{G}_f$. On en déduit alors à l'aide de la proposition 3.3.d) :

4.4. Corollaire (Théorème de Lagrange, *cf.* [18], [16]). — *La dimension de toute sous-algèbre coïdéale divise la dimension de S.* □

4.5. Proposition. — *Soient f et g des pré-sous-groupes. L'espace vectoriel engendré par $\{xy\,,\ x \in D_f\,,\ y \in \widehat{G}_g\}$ est une sous-algèbre involutive de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.*

Démonstration. — On a

$$\begin{aligned}\rho(\omega_{\eta,g})^* L(\omega_{f,\xi}) &= (\omega_{f,\xi} \otimes \mathrm{id} \otimes \omega_{g,\eta})(V_{23}^* V_{12}) = (\omega_{f,\xi} \otimes \mathrm{id} \otimes \omega_{g,\eta})(V_{12} V_{23}^* V_{13}^*)\\ &= \sum_i L(\omega_{f,\xi_i}) \rho(\omega_{\eta_i,g})^*,\end{aligned}$$

où on a posé $V^*(\xi \otimes \eta) = \sum_i \xi_i \otimes \eta_i$, d'où le résultat. □

On note $B_{f,g}$ la sous-algèbre définie dans la proposition 4.5. Remplaçant V par $\widehat{V}$ on en déduit que l'espace vectoriel engendré par $\{xy\,,\ x \in U\widehat{D}_g U\,,\ y \in G_f\}$ est une sous-algèbre involutive de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, notée $A_{g,f}$.

Remarque. — On peut donner la généralisation suivante à la proposition 4.5 : soit A une C^*-algèbre munie d'une coaction $\delta_A : A \to A \otimes S$ de S. Alors, avec les notations de [1], le sous-espace vectoriel de $A \rtimes \widehat{S}$ engendré par $\{\widehat{\theta}(x)\pi(a)\,,\ a \in A\,,\ x \in \widehat{G}_g\}$ est une sous-algèbre involutive de $A \rtimes \widehat{S}$. En effet, pour $a \in A$ et $\xi \in \mathcal{H}$, on a $\pi_L(a)(1 \otimes \rho(\omega_{\xi,g})^*) = (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \omega_{g,\xi})(\delta_A(a)_{12} V_{23}^*) = (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \omega_{g,\xi})(V_{23}^*(\mathrm{id} \otimes \delta) \circ \delta_A(a)) = (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \omega_{g,\xi})(V_{23}^*(\delta_A \otimes \mathrm{id}) \circ \delta_A(a)) = \sum_i (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \omega_{g,s_i\xi})(V_{23}^* \delta_A(a_i)_{12})$ où l'on a posé $\delta_A(a) = \sum_i a_i \otimes s_i$.

Remarquons que, comme D_f est une sous-algèbre coïdéale à droite de S, le coproduit de S définit par restriction une coaction de S dans D_f ; la proposition 4.5 est donc un cas particulier du résultat ci-dessus.

4.6. Lemme. — *On a :* $\dim B_{f,g} = \dim H_f \dim H^g = \dim A_{g,f}$.

Démonstration. — L'application $\mu : x \otimes y \mapsto xy$ est une application linéaire bijective de $S \otimes \widehat{S}$ sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, d'où la première assertion, vu que $B_{f,g} = \mu(D_f \otimes \widehat{G}_g)$.

La deuxième assertion en résulte en remplaçant V par $\widehat{V}$. □

4.7. LEMME. — *Soit f un pré-sous-groupe. Le commutant de G_f (resp. D_f, $\widehat{D}_f$, $\widehat{G}_f$) est $UA_{f,\hat{e}}U$ (resp. $UB_{\hat{e},f}U$, $A_{e,f}$, $UB_{f,e}U$).*

Démonstration. — Par le lemme 3.2.b), ces deux algèbres commutent. Par ailleurs $G_f = \{ x \in S\,,\ [x, \rho_f] = 0 \} \supset (USU)' \cap \widehat{D}'_f = (UA_{f,\hat{e}}U)'$. Donc $G_f = (UA_{f,\hat{e}}U)'$; le lemme résulte du théorème du bicommutant.

On en déduit les assertions «resp.» en remplaçant successivement V par $(U \otimes 1)V^*(U \otimes 1)$, $\Sigma V^* \Sigma$ et $\widetilde{V}$. □

On peut immédiatement généraliser ce lemme :

4.8. PROPOSITION. — *Soient f et g des pré-sous-groupes. Le commutant de $B_{f,g}$ (resp. $A_{f,g}$) est $UB_{g,f}U$ (resp. $UA_{g,f}U$).*

Démonstration. — On a $B'_{f,g} = D'_f \cap \widehat{G}'_g = U(B_{\hat{e},f} \cap B_{g,e})U$. L'application $\mu : x \otimes y \mapsto xy$ est une application linéaire bijective de $S \otimes \widehat{S}$ sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$; donc $B_{\hat{e},f} \cap B_{g,e} = \mu((D_g \otimes \widehat{S}) \cap (S \otimes \widehat{G}_f)) = B_{g,f}$. L'assertion «resp.» en résulte en remplaçant V par $\widehat{V}$. □

Le lemme 4.7 nous permet de donner, dans notre cadre, une démonstration immédiate de la généralisation par Masuoka du théorème de Nichols-Zoeller (*cf.* [18], [16]).

4.9. THÉORÈME. — *Soit B une sous-algèbre coïdéale (à gauche ou à droite) de S. Alors S est un B-module (à gauche) libre.*

Remarquons que, grâce à l'involution, on en déduit immédiatement que S est un B-module à droite libre.

Démonstration. — L'application $x \mapsto xe$ est un isomorphisme de B-modules entre S et $\mathcal{H}$. Le théorème se déduit facilement du lemme 4.7 et du lemme élémentaire suivant.

4.10. LEMME. — *Soient H un espace hilbertien de dimension finie et A une sous-algèbre involutive unitale de $\mathcal{L}(H)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ tel que H^k soit un A-module libre.*

(ii) $\dim A \dim A' = (\dim H)^2$.

Dans ce cas, H est un A module libre si et seulement si $\dim A$ *divise* $\dim H$.

Démonstration. — Écrivons $A = \underset{i\in I}{\oplus} M_{n_i}(\mathbb{C})$. Pour $i \in I$ notons r_i la multiplicité de la représentation correspondante. On a alors $\dim H = \sum_i n_i r_i$, $\dim A = \sum_i n_i^2$, $\dim A' = \sum_i r_i^2$. Par Cauchy-Schwartz, $\dim A \dim A' \geqslant (\dim H)^2$ avec égalité si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout i, $r_i = \lambda n_i$. Remarquons que H^k est un A module libre si et seulement s'il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $i \in I$, $kr_i = \ell n_i$. La première assertion en résulte.

Dans ce cas, H lui-même est libre sur A, si et seulement si $\lambda = r_i/n_i$ est entier. Or $\dim H = \sum_i n_i r_i = \lambda \sum_i n_i^2 = \lambda \dim A$. □

Le théorème résulte immédiatement des lemmes 4.7 et 4.10 (en utilisant le lemme 4.6 et la proposition 3.3.d). □

4.11. Corollaire. — *Soient f et g des pré-sous-groupes tels que $f \prec g$. Alors D_f est un D_g module libre.*

Démonstration. — En effet, par le théorème 4.9, $\mathcal{H}$ est isomorphe D_f^k en tant que D_f-module, donc en tant que D_g-module. Donc D_f^k est un D_g-module libre. Le corollaire résulte alors de la proposition 3.9.c). □

4.12. Corollaire. — *Soient f, f', g et g' des pré-sous-groupes, tels que $f \prec f'$ et $g' \prec g$. Alors $B_{f,g}$ est un $B_{f',g'}$-module libre.*

Démonstration. — Notons $k = \dim B_{f,g}/\dim B_{f',g} = \dim D_f/\dim D_{f'}$. Par le corollaire 4.11, il existe $x_1 ..., x_k$ tels que D_f soit engendré par les x_i en tant que $D_{f'}$ module. Alors $B_{f,g}$ est engendré par les x_i en tant que $B_{f',g}$-module. Par un argument de dimension, il en résulte que $B_{f,g}$ est un $B_{f',g}$-module libre. Remplaçant V par $\Sigma V^* \Sigma$, on en déduit que $B_{f',g}$ est un $B_{f',g'}$-module libre, d'où le résultat. □

En particulier, $\mathcal{L}(\mathcal{H}) = B_{\hat{e},e}$ est un $B_{f,g}$-module libre. Donc, $\mathcal{H}^k$ est un $B_{f,g}$-module libre, pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que la dimension de $B_{f,g}$ divise kn (2). Il s'ensuit que $\mathcal{H}$ est un $B_{f,f}$-module libre de rang 1. Ce résultat est analogue à [16]. On peut en fait donner ici une démonstration très simple de [16]. Par le lemme 3.2.b), les algèbres G_f et $\widehat{D}_f$ commutent.

4.13. Proposition (*cf.* [16] th. 3.1). — *Le $G_f \otimes \widehat{D}_f$-module $\mathcal{H}$ est isomorphe à $G_f \otimes \widehat{D}_f$.*

---

(2) Ce résultat se déduit directement des lemmes 4.7 et 4.10. Notons qu'on peut aussi en déduire une autre démonstration du corollaire 4.12 (analogue à celle de 4.11).

Démonstration. — Par la proposition 1.7.a), la représentation π : $G_f \otimes \widehat{D}_f \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ a même trace normalisée que la représentation naturelle $\pi' : G_f \otimes \widehat{D}_f \to \mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$. Par le théorème 4.9, celle-ci coïncide avec la trace normalisée de l'action de $G_f \otimes \widehat{D}_f$ dans lui même. Or par la proposition 3.3.d), $\mathcal{H}$ et $G_f \otimes \widehat{D}_f$ ont même dimension. □

5. Sous-groupes, co-sous-groupes et sous-quotients.

5.1. DÉFINITION. — *Un pré-sous-groupe f est appelé sous-groupe (resp. co-sous-groupe) si L_f (resp. ρ_f) est dans le centre de S (resp. $\widehat{S}$); il est appelé sous-groupe normal s'il est à la fois un sous-groupe et un co-sous-groupe. On appelle sous-quotient de V un sous-espace non nul H de $\mathcal{H}$ tel que $V(H \otimes H) = H \otimes H$.*

Par la proposition 3.11, un sous-groupe est donc donné par un projecteur central $p \in S$ tel que $p \otimes p \leqslant \delta(p)$. Remarquons que par la proposition 3.3.c), on a alors $\kappa(p) = p$; on en déduit que notre notion de sous-groupe coïncide avec celle de [12].

5.2. PROPOSITION. — *Soit H un sous-quotient.*

a) *Il existe un unique pré-sous-groupe $f \in H$ et un unique pré-sous-groupe $\hat{f} \in H$ tels que $H \subset H^f$ et $H \subset H_{\hat{f}}$.*

b) *On a $H = H^f \cap H_{\hat{f}}$.*

Démonstration. — a) L'unitaire V restreint à $H \otimes H$ est multiplicatif et il admet donc un vecteur fixe *i.e.* un vecteur $f \in H$, non nul tel que $V(f \otimes \xi) = f \otimes \xi$ pour tout $\xi \in H$. Comme $V(f \otimes f) = f \otimes f$, on peut quitte à multiplier f par un scalaire, supposer que f est un pré-sous-groupe. On a clairement $H \subset H^f$. Si g est un pré-sous-groupe vérifiant la même propriété on a $f \prec g$ et $g \prec f$ donc $f = g$ (3.7.b). L'existence et l'unicité de $\hat{f}$ se démontrent de façon analogue.

b) Il est clair que $H \subset H^f \cap H_{\hat{f}}$. Or d'après la proposition 3.9.c), on a $\dim(H^f \cap H_{\hat{f}})\langle f, \hat{f}\rangle^2 = 1$; comme l'unitaire V restreint à H est multiplicatif et que l'espace des vecteurs fixes est réduit à $\mathbb{C}f$, on a $\dim(H)\langle f, \hat{f}\rangle^2 = 1$ (*cf.* 1.2). □

5.3. PROPOSITION. — *Soient $f, \hat{f}$ des pré-sous-groupes tels que $\hat{f} \prec f$; posons $H = H^f \cap H_{\hat{f}}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *H est un sous-quotient.* (ii) $V(H\otimes H^f) = H\otimes H^f$. (iii) $V(H_{\hat f}\otimes H) = H_{\hat f}\otimes H$. (iv) $V(H_{\hat f}\otimes H^f) = H_{\hat f}\otimes H^f$. (v) $V(\hat f\otimes f)\in H_{\hat f}\otimes H^f$. (vi) $UH = H$.

Démonstration. — Si (ii) est vrai, comme $V(H\otimes H)\subset V(H_{\hat f}\otimes H_{\hat f})\subset \mathcal{H}\otimes H_{\hat f}$, (lemme 3.1.b), on a $V(H\otimes H)\subset(\mathcal{H}\otimes H_{\hat f})\cap H\otimes H^f = H\otimes H$. Donc (ii)⇒(i).

Si (iv) est vrai, comme $V(H_{\hat f}\otimes H)\subset V(H_{\hat f}\otimes H_{\hat f})\subset\mathcal{H}\otimes H_{\hat f}$, (lemme 3.1.b), on a $V(H_{\hat f}\otimes H)\subset(\mathcal{H}\otimes H_{\hat f})\cap H_{\hat f}\otimes H^f = H_{\hat f}\otimes H$. Donc (iv)⇒(iii).

En remplaçant V par $\Sigma V^*\Sigma$, on en déduit que (iv)⇒(ii) et (iii)⇒(i).

Supposons que (v) soit vérifiée. Alors $V(\rho_{\hat f}\otimes L_f)(\hat e\otimes e)\in H_{\hat f}\otimes H^f$. Comme $\hat e\otimes e$ est séparateur pour $\widehat S\otimes S$, il en résulte que $(\rho_{\hat f}\otimes L_f)V(\rho_{\hat f}\otimes L_f) = V(\rho_{\hat f}\otimes L_f)$. Donc (v)⇒(iv).

Montrons que (vi)⇒(v). Par le lemme 3.1.b), on a $V(\hat f\otimes f)\in\mathcal{H}\otimes H_{\hat f}$ et $\widehat V(f\otimes\hat f)\in\mathcal{H}\otimes H^f$, d'où l'on déduit que $V(\hat f\otimes f)\in UH^f\otimes H_{\hat f}$. Comme de plus V commute avec $\lambda_{\hat f}\otimes R_f$, on a $V(\hat f\otimes f)\in(UH_{\hat f}\cap UH^f)\otimes UH^f\cap H_{\hat f}$.

Supposons que (vi) est vérifiée. Comme $R_f\rho_{\hat f}R_f$ est l'identité sur H (rappelons que $R_f = UL_fU$), on a $R_f\rho_{\hat f}R_f \geqslant L_f\rho_{\hat f}$; or $\tau(R_f\rho_{\hat f}R_f) = \tau(R_f)\tau(\rho_{\hat f})$ (proposition 1.8 appliquée à $\widetilde V$); il vient $L_f\rho_{\hat f} = R_f\rho_{\hat f}$, donc $UH^f\cap H_{\hat f} = H$; donc $V(\hat f\otimes f)\in H\otimes H$.

Supposons enfin que (i) est vérifiée. En appliquant 1.3 à la restriction de V à $H\otimes H$, on voit que pour $\xi\in H$ on a $(\mathrm{id}\otimes\omega_{\hat f,f})(\Sigma V)\xi = (\dim H^{-1/2})\xi$. D'autre part, $(\mathrm{id}\otimes\omega_{\hat f,f})(\Sigma V) = \langle e,f\rangle^{-1}\langle\hat e,\hat f\rangle^{-1}(\mathrm{id}\otimes\omega_{\lambda_{\hat f}(\hat e),R_fe})(\Sigma V) = \langle e,f\rangle^{-1}\langle\hat e,\hat f\rangle^{-1}R_f(\mathrm{id}\otimes\omega_{\hat e,e})(\Sigma V)\lambda_{\hat f} = \langle e,f\rangle^{-1}\langle\hat e,\hat f\rangle^{-1}\langle e,\hat e\rangle R_f\lambda_{\hat f}$. Donc $R_f\lambda_{\hat f}$ agit comme l'identité sur H. Donc (i)⇒(vi). □

Soit $H = H^f\cap H_{\hat f}$ un sous-quotient. Remarquons que, $(\omega_{f,\hat f}\otimes\mathrm{id})(\Sigma V) = \langle e,f\rangle^{-1}\langle\hat e,\hat f\rangle^{-1}(\omega_{R_fe,\lambda_{\hat f}\hat e}\otimes\mathrm{id})(\Sigma V) = \langle e,f\rangle^{-1}\langle\hat e,\hat f\rangle^{-1}(\omega_{e,\hat e}\otimes\mathrm{id})((R_f\otimes 1)\Sigma V(\lambda_{\hat f}\otimes 1)) = \langle e,f\rangle^{-1}\langle\hat e,\hat f\rangle^{-1}(\omega_{e,\hat e}\otimes\mathrm{id})((1\otimes\lambda_{\hat f})\Sigma V(1\otimes R_f)) = \langle e,f\rangle^{-1}\langle\hat e,\hat f\rangle^{-1}\langle e,\hat e\rangle\lambda_{\hat f}UR_f$ par 1.3. On déduit alors de 1.3 que l'opérateur «U» associé à la restriction de V à H est la restriction de U à H.

5.4. Corollaire. — *Soient f et g des pré-sous-groupes tels que $f\prec g$ et $\langle f,g\rangle = 2^{-1/2}$. Alors $H_f\cap H^g$ est un sous-quotient.*

Démonstration. — On a $Uf = f$ et $Ug = g$, donc $U(H_f \cap H^g) = H_f \cap H^g$, vu que cet espace est de dimension 2. Le résultat découle de la prop. 5.3. □

5.5. COROLLAIRE. — *Soient H un sous-quotient, $f, \hat{f} \in H$ les pré-sous-groupes tels que $H = H^f \cap H_{\hat{f}}$.*

a) *Si $\hat{e} \in H$ on a $\hat{f} = \hat{e}$, $H^f = H$ et $V(\mathcal{H} \otimes H) = \mathcal{H} \otimes H$. Le projecteur q sur H est dans le centre de S.*

b) *Si $e \in H$ on a $f = e$, $H_{\hat{f}} = H$ et $V(H \otimes \mathcal{H}) = H \otimes \mathcal{H}$. Le projecteur sur H est dans le centre de $\widehat{S}$.*

Démonstration. — a) L'égalité $\hat{f} = \hat{e}$ résulte de l'unicité de $\hat{f}$; comme $H_{\hat{e}} = \mathcal{H}$, on a $H^f = H$ et l'égalité $V(\mathcal{H} \otimes H) = \mathcal{H} \otimes H$ (équivalente à $q \in S'$) résulte de 5.3. Comme $q = L_f$, $q \in S$; donc $q \in S \cap S'$.

b) se déduit de a) en remplaçant V par $\Sigma V^* \Sigma$. □

5.6. COROLLAIRE. — *Pour un pré-sous-groupe f les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est un co-sous-groupe.*

(ii) $V(H_f \otimes \mathcal{H}) = H_f \otimes \mathcal{H}$.

(iii) $V(H_f \otimes H_f) = H_f \otimes H_f$.

(iv) $\sigma(\delta(L_f)) = \delta(L_f)$.

(v) $UH_f = H_f$.

(vi) $D_f = G_f$.

Démonstration. — Comme la transformée de Fourier de ρ_f est proportionnelle à L_f, l'équivalence entre (i) et (iv) résulte de la proposition 1.5. (i) $\iff$ (ii) est claire. Enfin (ii) $\iff$ (iii) résulte immédiatement de la prop. 5.3. Si (v) est satisfaite, $\rho_f = \lambda_f$, donc (v)$\Rightarrow$(i) ; par la proposition 5.3, tout sous-quotient est invariant par U donc (ii)$\Rightarrow$(v). Enfin (v) $\iff$ (vi) résulte des définitions de G_f et D_f. □

En particulier (prop. 3.11), les co-sous-groupes de V sont donnés par les projecteurs $p \in S$ tels que $\sigma(\delta(p)) = \delta(p) \geqslant p \otimes p$. On retrouve la notion de 'factor group' de [12]. Donc un sous-groupe normal est donné par un projecteur central $p \in S$ tel que $\sigma(\delta(p)) = \delta(p) \geqslant p \otimes p$. Cette notion coïncide donc avec celle de [12].

On a aussi évidemment un analogue du corollaire 5.6 pour les sous-groupes.

5.7. Proposition. — *La borne supérieure et la borne inférieure de deux sous-groupes (resp. co-sous-groupes) est un sous-groupe (resp. co-sous-groupe).*

Démonstration. — Soient f et g deux sous-groupes (resp. co-sous-groupes). Notons h leur borne inférieure. Notons A le centre de S (resp. $A = \{x \in S, \ \delta(x) = \sigma(\delta(x))\}$). Par hypothèse, $L_f \in A$ et $L_g \in A$, donc le projecteur orthogonal sur $H^h = H^f \cap H^g$ est un élément de A, donc h est un sous-groupe (resp. un co-sous-groupe). Quand on change V en $\Sigma V^* \Sigma$, les pré-sous-groupes ne changent pas, l'ordre est changé en son opposé, les sous-groupes deviennent des co-sous-groupes *et vice-versa,* d'où la deuxième assertion. □

Normalisateur d'un pré-sous-groupe.

Soit f un pré-sous-groupe.

5.8. Lemme. — *Pour $\xi \in H^f$ et $\zeta \in \mathcal{H}$, on a $V(\xi \otimes \zeta) \in \mathcal{H} \otimes H^f \iff V(\xi \otimes \zeta) \in H^f \otimes \mathcal{H}$.*

Démonstration. — Par la prop. 3.11.a), on a $(L_f \otimes 1)V(L_f \otimes 1) = (1 \otimes L_f)V(L_f \otimes 1) = (L_f \otimes L_f)V$. Donc $(L_f \otimes 1)V(\xi \otimes \zeta) = V(\xi \otimes \zeta) \iff (1 \otimes L_f)V(\xi \otimes \zeta) = V(\xi \otimes \zeta)$. □

5.9. Proposition. — Soit f un pré-sous-groupe. Posons $H = \{\xi \in H^f, \ V(\xi \otimes H^f) \subset \mathcal{H} \otimes H^f\}$.

a) On a $V(H \otimes H) = H \otimes H$, autrement dit H est un sous-quotient.

b) H est le plus grand sous-quotient de vecteur fixe f *i.e.* tel que $f \in H \subset H^f$.

c) L'ensemble $K = \{\xi \in H_f, \ V^*(H_f \otimes \xi) \subset H_f \otimes \mathcal{H}\}$ est le plus grand sous-quotient de vecteur cofixe f *i.e.* tel que $f \in K \subset H_f$.

Démonstration. — a) On a $V(H \otimes H^f) \subset \mathcal{H} \otimes H^f$ par définition de H. On déduit alors du lemme 5.8 que $V(H \otimes H^f) \subset H^f \otimes \mathcal{H}$.

Pour $\xi, \zeta \in H$ et $\alpha \in H^f, V_{23}(V(\xi \otimes \zeta) \otimes \alpha) = V_{12}V_{13}V_{23}(\xi \otimes \zeta \otimes \alpha) \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes H^f$, donc $V(\xi \otimes \zeta) \in \mathcal{H} \otimes H$.

Pour $\xi \in H$ et $\alpha, \zeta \in H^f$, $V_{12}V_{13}(\xi \otimes \alpha \otimes \zeta) = V_{23}V_{12}(\xi \otimes V^*(\alpha \otimes \zeta)) \in H^f \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ car $V^*(H^f \otimes H^f) \subset H^f \otimes \mathcal{H}$ (lemme 3.1.b) ; il résulte du lemme 5.8 que $V(\xi \otimes \zeta) \in H \otimes \mathcal{H}$.

b) Si H_1 est un autre tel sous-quotient, on a $V(H_1 \otimes H^f) = H_1 \otimes H^f$, (prop. 5.3) donc $H_1 \subset H$.

c) se déduit de a) et b) en remplaçant V par $\Sigma V^* \Sigma$. □

Le pré-sous-groupe g vecteur fixe (resp. co-fixe) du plus grand sous-quotient de vecteur co-fixe (resp. fixe) f s'appelle le *normalisateur* (resp *co-normalisateur)* de f.

5.10. Corollaire. — *Soit $\hat{f}$ un pré-sous-groupe. L'ensemble des pré-sous-groupes f satisfaisant $\hat{f} \prec f$ et tels que $H_{\hat{f}} \cap H^f$ soit un sous-quotient est stable par borne supérieure et par borne inférieure.*

Démonstration. — Soit H le plus grand sous-quotient de vecteur cofixe $\hat{f}$. L'ensemble, ordonné par l'inclusion, des sous-quotients de vecteur cofixe $\hat{f}$ s'identifie avec l'ensemble des sous-groupes de la restriction de V à $H \otimes H$. Le résultat découle alors aisément de la proposition 5.7. □

6. Une généralisation du «biproduit croisé».

Dans ce paragraphe, on fixe un unitaire multiplicatif V de multiplicité 1 dans un espace hilbertien $\mathcal{H}$ de dimension finie n et deux pré-sous-groupes f et g de V tels que $\langle f, g\rangle = n^{-1/2}$. Le principal résultat est que les algèbres $A_{f,f}$ et $B_{g,g}$ introduites au paragraphe 4 sont des algèbres de Hopf en dualité (théorème 6.2). Cette construction généralise la construction du «biproduit croisé» de [12], [21], [15] (voir aussi [1] et [9]).

Commençons par quelques propriétés élémentaires vérifiées par le couple (f, g) de pré-sous-groupes tels que $\langle f, g\rangle = n^{-1/2}$; certaines d'entre elles nous serviront dans la démonstration du théorème 6.2.

6.1. Proposition. — *On a les identités suivantes :*

a) $L_f L_g = L_g L_f = \theta_{\hat{e},\hat{e}}$ *et* $\rho_f \rho_g = \rho_g \rho_f = \theta_{e,e}$.

b) $\langle f, e\rangle = \langle g, \hat{e}\rangle$ *et* $\langle f, \hat{e}\rangle = \langle g, e\rangle$.

c) $\rho_f(g) = \langle g, e\rangle e$ *et* $L_g(f) = \langle f, \hat{e}\rangle \hat{e}$.

d) $\rho_f L_g \rho_f = \langle g, e\rangle^2 \rho_f$ *et* $L_g \rho_f L_g = \langle f, \hat{e}\rangle^2 L_g$.

e) $L_g R_f = \theta_{\hat{e},\hat{e}}$ *et* $\lambda_f \rho_g = \theta_{e,e}$.

Démonstration. — a) Posons $x = L_f L_g - \theta_{\hat{e},\hat{e}} = L_f(L_g - \theta_{\hat{e},\hat{e}})$ et $y = \rho_f\rho_g - \theta_{e,e}$. On a $x^*x = L_g L_f L_g - \theta_{\hat{e},\hat{e}}$ et $y^*y = \rho_g\rho_f\rho_g - \theta_{e,e}$. De plus $\tau(x^*x) = \tau(L_f L_g) - 1/n = \langle L_f e, L_g e\rangle - 1/n = \langle e, f\rangle\langle g, e\rangle\langle f, g\rangle - 1/n$. De même $\tau(y^*y) = \langle \hat{e}, f\rangle\langle g, \hat{e}\rangle\langle f, g\rangle - 1/n$. Or $\langle e, f\rangle\langle g, e\rangle\langle f, g\rangle\langle \hat{e}, f\rangle\langle g, \hat{e}\rangle\langle f, g\rangle = 1/n^2$. On en déduit que $\tau(x^*x) = \tau(y^*y) = 0$, d'où a) et $\langle \hat{e}, f\rangle\langle g, \hat{e}\rangle\langle f, g\rangle = 1/n$, d'où b).

c) On a $\rho_f(g) = \rho_f\rho_g(g)$ et $L_g(f) = L_g L_f(f)$. c) découle donc de a).

d) On a

$$\begin{aligned}\rho_f L_g \rho_f &= (\omega_{g,g} \otimes \mathrm{id} \otimes \omega_{f,f} \otimes \omega_{f,f})(V_{23}V_{12}V_{24})\\ &= (\omega_{g,g} \otimes \mathrm{id} \otimes \omega_{f,f} \otimes \omega_{f,f})(V_{12}V_{13}V_{23}V_{24})\\ &= (\omega_{g,g} \otimes \mathrm{id} \otimes \omega_{f,f} \otimes \omega_{f,f})(V_{12}V_{13}V_{34}V_{23})\\ &= (\omega_{g,g} \otimes \mathrm{id} \otimes \omega_{f,f})(V_{12}V_{13}(1 \otimes 1 \otimes \rho_f)V_{23}).\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}&(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \omega_{f,f})(V_{13}(1 \otimes 1 \otimes \rho_f)V_{23})\\ &\qquad= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \omega_{f,f})(V_{13}(1 \otimes 1 \otimes \rho_f)V_{23}(1 \otimes 1 \otimes R_f))\\ &\qquad= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \omega_{f,f})(V_{13}(1 \otimes 1 \otimes \theta_{f,f})V_{23})\\ &\qquad= \rho_f \otimes \rho_f.\end{aligned}$$

Donc $\rho_f L_g \rho_f = (\omega_{g,g} \otimes \mathrm{id})(V(\rho_f \otimes \rho_f)) = (\omega_{g,\rho_f g} \otimes \mathrm{id})(V)\rho_f = \langle g, e\rangle(\omega_{g,e} \otimes \mathrm{id})(V)\rho_f$.

La deuxième assertion s'en déduit en remplaçant V par $\Sigma V^*\Sigma$.

e) $L_g R_f$ est un projecteur plus grand que $\theta_{\hat{e},\hat{e}}$; par ailleurs $L_g R_f$ est proportionnel à $L_g\rho_f L_g R_f = L_g \rho_f R_f L_g = L_g \theta_{f,f} L_g$ qui est de rang 1, d'où l'égalité. La deuxième assertion s'en déduit en remplaçant V par $\widehat{V}$.

□

Venons au résultat principal de ce paragraphe :

6.2. Théorème. — *Il existe un (et un seul) unitaire multiplicatif $W \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$ de multiplicité* 1, *pour lequel g est fixe et f cofixe et tel que les C^*-algèbres S et $\widehat{S}$ associées sont respectivement $A_{f,f}$ et $B_{g,g}$.*

Nous avons noté qu'un unitaire multiplicatif dans $\mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$ de multiplicité 1 est déterminé par l'espace de ses vecteurs fixes, de ses vecteurs cofixes et les C^*-algèbres S et $\widehat{S}$ associées (*cf.* prop. 1.10) ; donc si un tel opérateur W existe, il est unique.

Notons τ la trace normalisée de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Le théorème 6.2 résulte de la caractérisation des algèbres de Hopf en dualité donnée au paragraphe 2 (théorème 2.8). On a $\theta_{f,f} = L_f\lambda_f \in A_{f,f}$ et $\theta_{g,g} = L_g\rho_g \in B_{g,g}$. De plus, $\dim A_{f,f} = \dim B_{g,g} = n$ (lemme 4.6, prop. 3.3.d). Nous devons donc montrer :

— Pour tout $a \in A_{f,f}$ et tout $b \in B_{g,g}$ on a $\tau(ab) = \tau(a)\tau(b)$ (prop. 6.4 ci-dessous).

Il en résulte qu'il existe un unitaire $W \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$ tel que $\langle ag \otimes bf, W(cg \otimes df)\rangle = \tau(a^*b^*cd)$ pour tout $a, c \in A_{f,f}$ et tout $b, d \in B_{g,g}$.

— On a $W \in B_{g,g} \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H})$. En vertu de la prop. 4.8, il revient au même de démontrer que, pour tout $T \in R(D_g)$, on a $[T \otimes 1, W] = 0$, (prop. 6.7) et que pour tout $T \in \lambda(\widehat{G}_g)$, on a $[T \otimes 1, W] = 0$ (prop. 6.11).

6.3. Lemme. — *Pour tout $a \in \lambda(\widehat{D_f})$, tout $x \in S$ et tout $b \in \widehat{G_g}$ on a $\tau(axb) = \tau(a)\tau(x)\tau(b)$.*

Démonstration. — Considérons les sous-algèbres $D_1 = \lambda(\widehat{D_f}) \otimes 1$, $D_2 = L(S) \otimes 1$, $D_3 = V^*(1 \otimes \rho(\widehat{G_g}))V$.

Remarquons que l'espace vectoriel engendré par D_1D_2 est $A_{f,\hat{e}} \otimes 1$ et que l'espace vectoriel engendré par D_2D_3 est $\widetilde{V}(B_{\hat{e},g} \otimes 1)\widetilde{V}^*$; de plus, D_1 et D_3 commutent ; donc l'espace engendré par $d_1d_2d_3$, $d_i \in D_i$ est une sous-C^*-algèbre D de $\mathcal{L}(\mathcal{H}) \otimes \widehat{S}$. La dimension de D est clairement $\leqslant n^2$.

L'application $\sigma = \mathrm{id} \otimes \varepsilon : D \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est une représentation. Son image contient $\lambda_f\rho_g = \theta_{e,e}$ et S donc tout $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, vu que e est totalisateur pour S. Pour des raisons de dimension, on en déduit que σ est un isomorphisme. Comme D est un facteur, les traces $\tau \otimes \tau$ et $\tau \circ \sigma$ coïncident.

On a $(\tau \otimes \tau)(ax \otimes 1)V^*(1 \otimes b)V) = \tau \circ \sigma((ax \otimes 1)V^*(1 \otimes b)V) = \tau(axb)$. Or τ est la mesure de Haar de $\widehat{S}$, donc $(\mathrm{id} \otimes \tau)(V^*(1 \otimes b)V) = \tau(b)1$; donc $\tau(axb) = \tau(b)\tau(ax) = \tau(b)\tau(a)\tau(x)$ (prop. 1.7.a). □

6.4. Proposition. — *Pour tout $a \in A_{f,f}$ et tout $b \in B_{g,g}$ on a $\tau(ab) = \tau(a)\tau(b)$.*

Démonstration. — Pour $a_1 \in \lambda(\widehat{D}_f)$, $a_2 \in L(G_f)$, $b_2 \in L(D_g)$, et $b_3 \in \rho(\widehat{G}_g)$, on a $\tau(a_1a_2b_2b_3) = \tau(a_1)\tau(a_2b_2)\tau(b_3)$ (lemme 6.3). Or $\tau(a_2b_2) = \langle e, a_2b_2e\rangle = \langle \rho_fe, a_2b_2\lambda_ge\rangle$; or $\rho_fa_2 = a_2\rho_f$ et $b_2\lambda_g = \lambda_gb_2$ (prop. 4.2) ; enfin $\rho_f\lambda_g = \theta_{e,e}$; on trouve $\langle \rho_fe, a_2b_2\lambda_ge\rangle = \langle e, a_2e\rangle\langle e, b_2e\rangle$.

On a donc $\tau(a_1a_2b_2b_3) = \tau(a_1)\tau(a_2)\tau(b_2)\tau(b_3) = \tau(a_1a_2)\tau(b_2b_3)$, d'où la proposition. □

6.5. LEMME. — *Pour tout $b \in B_{\hat{e},g}$, on a $E_{A_{f,\hat{e}}}(b) \in S$.*

Démonstration. — Pour $a \in A_{f,\hat{e}}$, $x \in S$, $b \in \widehat{G}_g$, on a $ax \in A_{f,\hat{e}}$, donc $\tau(axb) = \tau(ax)\tau(b)$ (lemme 6.3), donc $E_{A_{f,\hat{e}}}(xb) = \tau(b)x$. □

Considérons l'opérateur $W \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$ donné par $\langle ag \otimes bf, W(cg \otimes df)\rangle = \tau(a^*b^*cd)$ pour tout $a, c \in A_{f,f}$ et tout $b, d \in B_{g,g}$.

Par le théorème 2.8, il nous reste juste à montrer que $W \in B_{g,g} \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Nous aurons besoin du lemme suivant :

6.6. LEMME. — a) *On a $(\rho_g \otimes 1)\widehat{V}(1 \otimes \lambda_g) = \widehat{V}(\rho_g \otimes \lambda_g)$.*

b) *Pour tout $\alpha, \beta \in \lambda(\widehat{D}_f)$ on a $[\rho_g R_f \otimes 1, (\beta^* \otimes 1)\widehat{V}(\alpha \otimes \lambda_g)] = 0$.*

Démonstration. — a) On a $\Sigma(1 \otimes U)\widehat{V}^*(\rho_g \otimes 1)\widehat{V}(1 \otimes \lambda_g)(1 \otimes U)\Sigma = V^*(1 \otimes \rho_g)V(\rho_g \otimes 1) = \widehat{\delta}(\rho_g)(\rho_g \otimes 1) = \rho_g \otimes \rho_g$ (prop. 3.11.b), d'où a).

b) Par a) $\rho_g \otimes 1$ commute avec $\widehat{V}(1 \otimes \lambda_g)$. Les autres commutations sont évidentes. □

6.7. PROPOSITION. — *Pour tout $T \in R(D_g)$, on a $[T \otimes 1, W] = 0$.*

Démonstration. — Soient $x, a \in G_f$, $y \in B_{g,g}$, $b \in D_g$, $c \in \widehat{G}_g$, et $\alpha, \beta \in \lambda(\widehat{D}_f)$. On a $[T, \rho_g] = 0$, donc $T\alpha g \in H_g = \lambda(\widehat{D}_f)g$; soit $\alpha_1 \in \lambda(\widehat{D}_f)$ tel que $T\alpha g = \alpha_1 g$. De même, il existe un unique $\beta_1 \in \lambda(\widehat{D}_f)$ tel que $T^*\beta g = \beta_1 g$. On a

$$\begin{aligned}\langle x\beta g \otimes yf, (T \otimes 1)W(a\alpha g \otimes cbf)\rangle &= \langle x\beta_1 g \otimes yf, W(a\alpha g \otimes cbf)\rangle \\ &= \tau(\beta_1^* x^* y^* a\alpha cb) \\ &= \tau(x^* y^* ac\alpha b\beta_1^*).\end{aligned}$$

De même

$$\langle x\beta g \otimes yf, W(T \otimes 1)(a\alpha g \otimes cbf)\rangle = \tau(x^* y^* ac\alpha_1 b\beta^*).$$

Remarquons que $\alpha b\beta_1^*, \alpha_1 b\beta^* \in A_{f,\hat{e}}$ et $x^*y^*ac \in B_{\hat{e},g}$. On a alors $\tau(x^*y^*ac\alpha b\beta_1^*) = \tau(z\alpha b\beta_1^*)$ et $\tau(x^*y^*ac\alpha_1 b\beta^*) = \tau(z\alpha_1 b\beta^*)$, où $z = E_{A_{f,\hat{e}}}(x^*y^*ac)$. Par le lemme 6.5, $z \in S$.

Comme $z, b \in S$ et $\alpha_1, \beta^* \in \lambda(\widehat{S})$, on a $\tau(\beta^* z\alpha_1 b) = \langle \beta\hat{e}\otimes z^*e, \widehat{V}(\alpha_1\hat{e}\otimes be)\rangle$; de même, $\tau(\beta_1^* z\alpha b) = \langle \beta_1\hat{e} \otimes z^*e, \widehat{V}(\alpha\hat{e} \otimes be)\rangle$. Or $be \in UH_g$ et $\hat{e} = \langle g, \hat{e}\rangle^{-1} R_f g = \langle g, \hat{e}\rangle^{-1} R_f \rho_g g$.

Donc $\tau(\beta^* z\alpha_1 b) = \langle g, \hat{e}\rangle^{-1}\langle g\otimes z^*e, (\rho_g R_f \otimes 1)(\beta^* \otimes 1)\widehat{V}(\alpha_1 \otimes \lambda_g)(\hat{e}\otimes be)\rangle = \langle g, \hat{e}\rangle^{-1}\langle g \otimes z^*e, (\beta^* \otimes 1)\widehat{V}(\alpha_1 \otimes \lambda_g)(\rho_g R_f\hat{e} \otimes be)\rangle$ par le lemme 6.6. Donc $\tau(\beta^* z\alpha_1 b) = \langle \beta g \otimes z^*e, \widehat{V}(\alpha_1 g \otimes be)\rangle$. De même, $\tau(\beta_1^* z\alpha b) = \langle \beta_1 g \otimes z^*e, \widehat{V}(\alpha g \otimes be)\rangle = \langle T^*\beta g \otimes z^*e, \widehat{V}(\alpha g \otimes be)\rangle = \tau(\beta^* z\alpha_1 b)$, d'où le résultat. $\square$

6.8. Lemme. — *Soient $a_1 \in \lambda(\widehat{D_f})$, $a_2 \in L(G_f)$, $b_2 \in L(D_g)$ et $b_1 \in \rho(\widehat{G_g})$.*

a) *On a $\langle a_1 a_2 g, b_1 b_2 f\rangle = n^{1/2}\langle a_2 e, b_1\hat{e}\rangle\langle a_1\hat{e}, b_2 e\rangle$.*

b) *On a $\langle U b_2 b_1 f, a_2 a_1 g\rangle = n^{1/2}\langle U b_1\hat{e}, a_2 e\rangle\langle U b_2 e, a_1\hat{e}\rangle$.*

Démonstration. — a) On a $[R_f, a_1] = [R_g, b_1] = 0$ et $R_f R_g = \theta_{\hat{e},\hat{e}}$, donc

$$\begin{aligned}\langle a_1 a_2 g, b_1 b_2 f\rangle &= n^{1/2}\langle b_1^* a_2 R_g e, a_1^* b_2 R_f e\rangle\\ &= n^{1/2}\langle R_g b_1^* a_2 e, R_f a_1^* b_2 e\rangle\\ &= n^{1/2}\langle b_1^* a_2 e, \theta_{\hat{e},\hat{e}} a_1^* b_2 e\rangle\\ &= n^{1/2}\langle a_2 e, b_1\hat{e}\rangle\langle a_1\hat{e}, b_2 e\rangle.\end{aligned}$$

b) On a $[\rho_f, a_2] = [\lambda_g, b_2] = 0$ et $\rho_f\rho_g = \theta_{e,e}$, donc

$$\begin{aligned}\langle U b_2 b_1 f, a_2 a_1 g\rangle &= n^{1/2}\langle a_2^* U b_1 \lambda_f\hat{e}, U b_2^* U a_1 \rho_g\hat{e}\rangle\\ &= n^{1/2}\langle \rho_f a_2^* U b_1\hat{e}, \rho_g U b_2^* U a_1\hat{e}\rangle\\ &= n^{1/2}\langle a_2^* U b_1\hat{e}, \theta_{e,e} U b_2^* U a_1\hat{e}\rangle\\ &= n^{1/2}\langle U b_1\hat{e}, a_2 e\rangle\langle U b_2 e, a_1\hat{e}\rangle.\end{aligned}$$

$\square$

Notons $J_A : xg \mapsto x^*g$ $(x \in A_{f,f})$ et $J_B : yf \mapsto y^*f$ $(y \in B_{g,g})$ les involutions canoniques.

6.9. Proposition. — On a $J_A J_B = U$.

Démonstration. — Soient $a_1 \in \lambda(\widehat{D_f})$, $a_2 \in L(G_f)$, $b_2 \in L(D_g)$ et $b_1 \in \rho(\widehat{G_g})$. On a : $\langle J_A J_B b_2 b_1 f, a_2 a_1 g\rangle = \langle J_A a_2 a_1 g, J_B b_2 b_1 f\rangle = \langle a_1^* a_2^* g, b_1^* b_2^* f\rangle = n^{1/2}\langle a_2^* e, b_1^*\hat{e}\rangle\langle a_1^*\hat{e}, b_2^* e\rangle$ par le a) du lemme précédent. Or, $\langle a_2^* e, b_1^*\hat{e}\rangle = \langle J a_2 e, \widehat{J} b_1\hat{e}\rangle = \langle J\widehat{J} b_1\hat{e}, a_2 e\rangle = \langle U b_1\hat{e}, a_2 e\rangle$; de même,

$\langle a_1^* \hat{e}, b_2^* e\rangle = \langle U b_2 e, a_1 \hat{e}\rangle$. Par le lemme 6.8.b), on a donc $\langle J_A J_B b_2 b_1 f, a_2 a_1 g\rangle$ $= \langle U b_2 b_1 f, a_2 a_1 g\rangle$.

Comme les $b_2 b_1 f$ et les $a_2 a_1 g$ engendrent $\mathcal{H}$, le résultat en découle immédiatement. □

6.10 Lemme. — *Pour $a, x \in U A_{f,f} U$ et pour $b, y \in B_{g,g}$ on a :* $\langle ag \otimes bf, (1 \otimes U) W^* (1 \otimes U)(xg \otimes yf)\rangle = \tau(a^* b^* xy)$.

Démonstration. — Posons $a_1 = J_A a J_A$, $x_1 = J_A x J_A$, $b_1 = J_A b J_A$ et $y_1 = J_A y J_A$. Alors $a_1, x_1 \in A_{f,f}$ et $b_1, y_1 \in B_{g,g}$. On a $\langle ag \otimes bf, (1 \otimes U) W^* (1 \otimes U)(xg \otimes yf)\rangle = \langle (J_A a_1 g \otimes J_A b_1 g), (1 \otimes U) W^* (1 \otimes U)(J_A x_1 f \otimes J_A y_1 g)\rangle = \langle (J_A a_1 g \otimes U J_A b_1 f), W^*(J_A x_1 g \otimes U J_A y_1 f)\rangle = \langle W(a_1^* g \otimes b_1^* f), (x_1^* g \otimes y_1^* f)\rangle = \tau(b_1 a_1 y_1^* x_1^*) = \tau(J_A b a y^* x^* J_A) = \tau(x y a^* b^*)$.

□

6.11. Proposition. — *Pour tout $T \in \lambda(\widehat{G}_g)$, on a $[T \otimes 1, W] = 0$.*

Démonstration. — Si on remplace V par $\Sigma V^* \Sigma$, alors les algèbres S et $\widehat{S}$ sont échangées, toutes deux avec le coproduit opposé; les algèbres D_g et $\widehat{G}_g$ sont échangées, l'algèbre G_f est transformée en $\widehat{D}_f$ et $U\widehat{D}_f U$ en $U G_f U$. Donc $B_{g,g}$ est inchangée et $A_{f,f}$ est transformée en $U A_{f,f} U$. Par le lemme 6.10, W est alors transformée en $(1 \otimes U) W^* (1 \otimes U)$.

La proposition 6.7 montre que

$$[(1 \otimes U) W^* (1 \otimes U), (U \widehat{G}_g U \otimes 1)] = 0.$$ □

6.12. *Remarque.* — On peut donner une formule explicite pour l'unitaire multiplicatif W : notons $T : \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ l'application donnée par $T(\xi \otimes \eta) = a R_g \rho_f \eta$, où $a \in U\widehat{D}_f U$ est tel que $a\hat{e} = \langle f, \hat{e}\rangle^{-1} R_f \xi$. On vérifie que $T^* T = R_f \otimes \rho_f$, donc T^* est isométrique. On a

$$W = n(T \otimes T)(1 \otimes R_g \otimes \lambda_g \otimes 1)\widehat{V}_{13}\widehat{V}_{23} V_{23} V_{24}(T^* \otimes T^*).$$

6.13. Proposition. — a) *e est un pré-sous-groupe de W; on a $(\omega_{e,e} \otimes \mathrm{id})(W) = \lambda_f$ et $(\mathrm{id} \otimes \omega_{e,e})(W) = \rho_g$. La sous-algèbre coïdéale à gauche (resp. à droite) de l'algèbre de Hopf $A_{f,f}$ (resp. $B_{g,g}$) associée est $U\widehat{D}_f U$ (resp. $\widehat{G}_g$).*

b) *$\hat{e}$ est un pré-sous-groupe de W; on a $(\omega_{\hat{e},\hat{e}} \otimes \mathrm{id})(W) = L_f$ et $(\mathrm{id} \otimes \omega_{\hat{e},\hat{e}})(W) = L_g$. La sous-algèbre coïdéale à droite (resp. à gauche) de l'algèbre de Hopf $A_{f,f}$ (resp. $B_{g,g}$) associée est G_f (resp. D_g).*

c) *Le pré-sous-groupe e de W est un sous-groupe (resp. un co-sous-groupe) si et seulement si f (resp. g) est un co-sous-groupe de V ; le pré-sous-groupe $\hat{e}$ de W est un sous-groupe (resp. un co-sous-groupe) si et seulement si f (resp. g) est un sous-groupe de V.*

Démonstration. — a) Comme e est proportionnel à $\lambda_f g$ et $\rho_g f$, $\lambda_f \in A_{f,f}$ et $\rho_g \in B_{g,g}$, la première assertion résulte du corollaire 3.12. Notons les coïdéaux relatifs à W avec un exposant W. On a $G_e^W = \{x \in A_{f,f}\,,\ [x,(\mathrm{id} \otimes \omega_{e,e})(W)] = 0\} \supset U\widehat{D}_f U$, vu que $(\mathrm{id} \otimes \omega_{e,e})(W) = \rho_g$. Comme $\dim G_e^W = \langle g, e\rangle^{-2} = \dim \widehat{D}_f$, on a l'égalité. De même $\widehat{D}_e^W = \widehat{G}_g$.

L'assertion b) se démontre de façon analogue.

c) e est un sous-groupe de W si et seulement si $U(\omega_{e,e} \otimes \mathrm{id})(W)U = (\omega_{e,e} \otimes \mathrm{id})(W)$; par a), cela a lieu si et seulement si f est un co-sous-groupe de V. Les autres assertions se montrent de façon analogue. □

6.14. *Remarque.* — On déduit de la proposition 6.13 que l'algèbre $A_{e,e}^W$ associée à l'unitaire multiplicatif W et à son pré-sous-groupe e est $U\widehat{S}U$. De même, l'algèbre $B_{\hat{e},\hat{e}}^W$ est S.

La construction ci-dessus associe à un triplet (V, f, g) consistant en un unitaire multiplicatif V et deux pré-sous-groupes f et g le plus éloignés possible, un unitaire multiplicatif W. Si on applique à nouveau cette construction au triplet $(W, e, \hat{e})$, on obtient donc $\widehat{V}$.

Si dans la construction de l'unitaire multiplicatif W on échange les rôles de f et g, on obtient un unitaire multiplicatif W', de vecteur fixe f, cofixe g, les algèbres S et $\widehat{S}$ associées étant $A_{g,g}$ et $B_{f,f}$. Or $A_{g,g} = \widehat{J}B_{g,g}\widehat{J}$ et $B_{f,f} = \widehat{J}A_{f,f}\widehat{J}$; donc l'unitaire multiplicatif associé est $(\widehat{J}\otimes\widehat{J})\Sigma W^*\Sigma(\widehat{J}\otimes\widehat{J}) = (\widehat{J}J_B\otimes\widehat{J}J_B)\widehat{W}(J_B\widehat{J}\otimes J_B\widehat{J})$, qui est équivalent à $\widehat{W}$.

Si on part de $(W, \hat{e}, e)$, on obtient donc l'unitaire $V' = (J_B\widehat{J} \otimes J_B\widehat{J})V(\widehat{J}J_B \otimes \widehat{J}J_B)$ équivalent à V.

Plus généralement, soient $f, \hat{f}, g, \hat{g}$ des pré-sous-groupes tels que $\hat{f} \prec f$, $\hat{g} \prec g$ et $\langle f, \hat{g}\rangle = \langle g, \hat{f}\rangle = n^{-1/2}$. Notons W l'unitaire multiplicatif associé à $(V, \hat{f}, g)$. On vérifie alors que :

— f et $\hat{g}$ sont des pré-sous-groupes de W.

— Les unitaires multiplicatifs construits à partir de $(V, f, \hat{g})$ et $(W, f, \hat{g})$ coïncident.

On en déduit alors que $\hat{f}$ et g sont des pré-sous-groupes de l'unitaire multiplicatif W' construit à partir de $(V, f, \hat{g})$ et que l'unitaire multiplicatif construit à partir de $(W', \hat{f}, g)$ est conjugué à W.

7. Liens avec les sous-facteurs.

7.1. Inclusions de profondeur 2.

Soit $N \subset M$ une inclusion irréductible de profondeur 2 d'indice fini de facteurs de von Neumann de type II_1.

— Notons $N \subset M \subset M_1 \subset M_2 \ldots$ la tour de Jones de l'inclusion $N \subset M$.

— Posons $\widehat{S} = M_1 \cap N'$ et $S = M_2 \cap M'$ contenues dans $M_2 \cap N'$ qui est isomorphe à un $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ (par définition de la profondeur 2).

— Notons $q \in M_1 \cap N'$ le projecteur de Jones de l'inclusion $N \subset M$ et $p \in M_2 \cap M'$ le projecteur de Jones de l'inclusion $M \subset M_1$. Ce sont des projecteurs minimaux de $M_2 \cap N' = \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Choisissons $e, \hat{e} \in \mathcal{H}$ de norme 1 tels que $p\hat{e} = \hat{e}$, $qe = e$ et $\langle e, \hat{e} \rangle \in \mathbb{R}_+$.

Notons τ la trace normalisée de M_2. Remarquons que, pour $x \in S$, on a $E_{M_1}(x) \in M_1 \cap M' = \mathbb{C}1$; donc $E_{M_1}(x) = \tau(x)$. Donc, pour $x \in S$ et $y \in M_1$ on a $\tau(xy) = \tau(x)\tau(y)$.

Notons alors $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$ l'unitaire tel que, pour $a, x \in S$ et $b, y \in \widehat{S}$ on ait $\langle xe \otimes y\hat{e}, V(ae \otimes b\hat{e}) \rangle = \tau(x^* y^* ab)$.

Notons aussi $W \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes L^2(M_1))$ tel que, pour $a, x \in S$ et $b, y \in M_1$ on ait $\langle xe \otimes y\xi_\tau, W(ae \otimes b\xi_\tau) \rangle = \tau(x^* y^* ab)$. C'est l'image de V par la suite des inclusions $\mathcal{L}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{H}) \otimes M_2 \subset \mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes L^2(M_1))$.

Il est clair que W commute à $1 \otimes b$ pour tout $b \in M$, d'où l'on déduit que $W \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \otimes S$. Par le théorème 2.8 (en utilisant le lemme 2.2.c), on en déduit que S et $\widehat{S}$ sont des algèbres de Hopf en dualité. De plus, pour $x, y \in M$ on a $W^*(1 \otimes xqy)W = (1 \otimes x)W^*(1 \otimes q)W(1 \otimes y) \in \widehat{S} \otimes M_1$. On en déduit que l'application $z \mapsto W^*(1 \otimes z)W$ est une coaction (à gauche) de $\widehat{S}$ dans M_1 dont l'algèbre des points fixes est M.

On retrouve ainsi un résultat d'Ocneanu; voir [2], [20] pour d'autres démonstrations (dans le cadre des inclusions d'indice fini) et [14], [6] (dans un cadre plus général).

7.2. Pré-sous-groupes et facteurs intermédiaires.

Conservons les notations ci-dessus. Soit f un pré-sous-groupe de V. Posons $M_f = \{x \in M_1,\ [x, L_f] = 0\}$. C'est un sous-facteur de M_1 contenant M et $\widehat{D}_f \subset \widehat{S} = M_1 \cap N'$. On en déduit que $[M_f : M] \geqslant \dim \widehat{D}_f$. Par ailleurs, comme $L_f \geqslant p$, on a $L_f \xi_\tau = \xi_\tau$; donc, pour $x \in M_f$, on a $L_f x \xi_\tau = x L_f \xi_\tau = x \xi_\tau$; on en déduit que $[M_f : M] \leqslant \tau(L_f)/\tau(p) = \dim \widehat{D}_f$; on en déduit que L_f est le projecteur de Jones de $M_f \subset M_1$.

Réciproquement, soit $M \subset P \subset M_1$ un facteur intermédiaire. Posons $Q = J_M P' J_M \subset \mathcal{L}(L^2(M))$; on a $N \subset Q \subset M$; notons $p_1 \in S$ le projecteur de Jones de l'inclusion $P \subset M_1$ et $q_1 \in \widehat{S}$ le projecteur de Jones de l'inclusion $Q \subset M$. Comme $[P : M] = [M : Q]$, on a $[P : M][Q : N] = [M : N]$, donc $\tau(p_1 q_1) = \tau(p_1)\tau(q_1) = \tau(p)[P : M]\tau(q)[Q : N] = \dim(\mathcal{H})^{-1}$. Par ailleurs, $q_1 \in P$ (car P est la construction de base de $Q \subset M$) et $p_1 \in P'$; donc $p_1 q_1 = q_1 p_1$. Par le corollaire 3.12, il existe un pré-sous-groupe f tel que $p_1 = L_f$ et $q_1 = \rho_f$.

En d'autres termes, les L_f où f est un pré-sous-groupe, sont les projecteurs de Jones des facteurs intermédiaires $M \subset P \subset M_1$. L'application $P \mapsto J_M P' J_M$ est une correspondance bijective entre facteurs intermédiaires $M \subset P \subset M_1$ et facteurs intermédiaires $N \subset Q \subset M$. On en déduit que les ρ_f où f est un pré-sous-groupe, sont les projecteurs de Jones des facteurs intermédiaires $N \subset Q \subset M$.

On en déduit une bijection (décroissante) $f \mapsto N_f$ entre pré-sous-groupes et facteurs intermédiaires $N \subset P \subset M$. On retrouve ainsi, à l'aide de la proposition 4.3, une bijection croissante (un isomorphisme d'ensembles ordonnés) entre facteurs intermédiaires et sous-algèbres coïdéales à gauche de l'algèbre de Hopf S [11] (voir aussi [5] où ce résultat est généralisé au cas non compact).

Plusieurs de nos constructions s'interprêtent alors :

— Le théorème de finitude (corollaire 3.6), est donc une conséquence du fait que dans une inclusion d'indice fini il y a un nombre fini de facteurs intermédiaires ([22]).

— Les sous-groupes correspondent aux facteurs intermédiaires N_f tels que l'inclusion $N_f \subset M$ soit de profondeur 2; les co-sous-groupes correspondent aux facteurs intermédiaires N_f tels que l'inclusion $N \subset N_f$ soit de profondeur 2.

— Les sous-quotients correspondent aux couples de facteurs intermédiaires $N_{\hat{f}}$, N_f tels que $N_f \subset N_{\hat{f}}$ et que l'inclusion $N_f \subset N_{\hat{f}}$ soit de profondeur 2.

— Des pré-sous-groupes f et g sont le plus éloignés possible si et seulement si on a un carré commutatif et cocommutatif

$$\begin{array}{ccc} N & \subset & N_f \\ \cap & & \cap \\ N_g & \subset & M. \end{array}$$

Notons alors M_f la construction de base de Jones de l'inclusion $N_f \subset M$. La construction du paragraphe 6, dit alors que l'inclusion $N_g \subset M_f$ est irréductible de profondeur 2.

On peut en fait donner une démonstration directe de ce résultat :

1. On a $N'_g \cap M_1 = \widehat{G}_g \subset \widehat{S} = N' \cap M_1$. On a $N' \cap M_f = \widehat{D}_f$. Donc $N'_g \cap M_f = (N'_g \cap M_1) \cap (N' \cap M_f) = \widehat{G}_g \cap \widehat{D}_f = \mathbb{C}$.

2. La construction de base appliquée à l'inclusion $N_g \subset M_f$ donne un facteur M_g^1. On a $M' \cap M_g^1 = D_g \subset S = M' \cap M_2$. On en déduit que $N'_g \cap M_g^1$ contient l'algèbre $B_{g,g}$. Sa dimension est alors égale à l'indice de $N_g \subset M_f$, d'où le résultat.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Baaj et G. Skandalis, Unitaires multiplicatifs et dualité pour les produits croisés de C^*-algèbres, Annales Scient. E. Norm. Sup., 4e série, 26 (1993), 425-488.

[2] M.-C. David, Paragroupe d'Adrian Ocneanu et algèbre de Kac. Pac., J. of Math., 172, No 2 (1996), 331-363.

[3] M.-C. David, Couple assorti de systèmes de Kac et inclusions de facteurs de type II_1, Prépublication.

[4] M. Enock, Inclusions irréductibles de facteurs et unitaires multiplicatifs II, Prépublication.

[5] M. Enock, Sous-facteurs intermédiaires et groupes quantiques mesurés, Prépublication.

[6] M. Enock and R. Nest, Irreducible inclusions of factors, multiplicative unitaries and Kac algebras, J.F.A., 137, No 2 (1996), 466-543.

[7] M. Enock et J.-M. Schwartz, Kac Algebras and Duality of Locally Compact Groups, Springer, 1992.

[8] F.M. Goodman, P. de la Harpe, V.F.R. Jones, Coxeter graphs and towers of algebras, M.S.R.I. publ. 14.

[9] J.H. Hong and W. Szymański, Composition of subfactors and twisted bicrossed products, J. Operator Theory, 37, no. 2 (1997), 281-302.

[10] M. IZUMI and H. KOSAKI, Finite-dimensional Kac algebras arising from certain group actions on a factor, Internat. Math. Res. Notices, no. 8 (1996), 357-370.

[11] M. IZUMI, R. LONGO and S. POPA, A Galois Correspondance for Compact Groups of Automorphisms of von Neumann Algebras with a Generalization to Kac Algebras, preprint, Feb. 1996.

[12] G.I. KAC, Extensions of groups to ring groups, Math U.S.S.R. Sbornik, 5 (1968), 451-474.

[13] G.I. KAC and V.G. PALJUTKIN, Finite group rings, Trans. Moskow Math. Soc., (1966), 251-294.

[14] R. LONGO, A duality for Hopf algebras and subfactors I, Comm. Math. Phys., 159 (1994), 133-155.

[15] S. MAJID, Hopf-von Neumann algebra bicrossproducts, Kac algebra bicrossproducts, and the classical Yang-Baxter equations, J.F.A., 95, No 2 (1991), 291-319.

[16] A. MASUOKA, Freeness of Hopf Algebras over coideal subalgebras, Comm. in Alg., 20 (5) (1992), 1353-1373.

[17] S. MONTGOMERY, Hopf algebras and their action on rings, C.B.M.S. lecture notes, 82, A.M.S. (1993).

[18] W.D. NICHOLS and M.B. ZOELLER, Hopf algebra freeness theorem, Amer. J. of Math., 111 (1989), 381-385.

[19] S. POPA, Orthogonal pairs of $*$-subalgebras in finite von Neumann algebras, J. Operator Theory, 9 (1983), 253–268.

[20] W. SZYMANSKI, Finite index subfactors and Hopf algebras crossed products, Proc. A.M.S., 120 (1994), 519-528.

[21] M. TAKEUCHI, Matched pairs of groups and bismashed product of Hopf algebras, Comm. Alg., 9 (1981), 841-882.

[22] Y. WATATANI, Lattice structure of intermediate subfactors, Math. Phys. Stud., 16, Quantum and non-commutative analysis (Kyoto, 1992), (1993), 331-333.

Manuscrit reçu le 20 juillet 1998,
accepté le 15 janvier 1999.

S. BAAJ,
Université Blaise Pascal
Département de Mathématiques
F-63177 Aubière.
baaj@ucfma.univ-bpclermont.fr
&
E. BLANCHARD,
Institut de Mathématiques de Luminy
Case 907
F-13288 Marseille cedex 9.
blanch@iml.univ-mrs.fr
&
G. SKANDALIS,
Université Denis Diderot (Paris 7)
Institut de Mathématiques de Jussieu
Case Postale 7012
2, place Jussieu
F-75251 Paris cedex 05.
skandal@math.jussieu.fr